- $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

- für $0 \leq b \leq a$ in $\mathbb{Z}$:

$$\underbrace{\binom{a}{b}}_{\text{Binomial-koeffizient}} := \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

z.B. $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

- Für $1 \leq b \leq a$ in $\mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{b-1} + \binom{a}{b} = \binom{a+1}{b}$$

z.B. $$\underbrace{\binom{5}{3}}_{10} + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} = \binom{6}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

Mo 01.01.2021 : Feiertag

Do 04.01.2021 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vorlesung in V38.01} \\ \text{Vortragsübung online / per Video} \end{array} \right.$

$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$ Abbildung

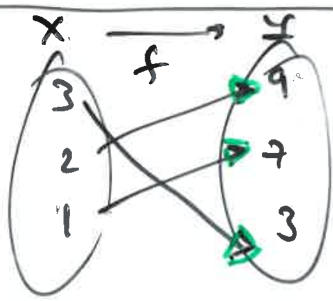
Besteht für jedes $y \in Y$

- $f^{-1}(\{y\})$ aus mindestens einem Element, dann heißt f surjektiv
- $f^{-1}(\{y\})$ aus höchstens einem Element, dann heißt f injektiv
- $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element, dann heißt f bijektiv

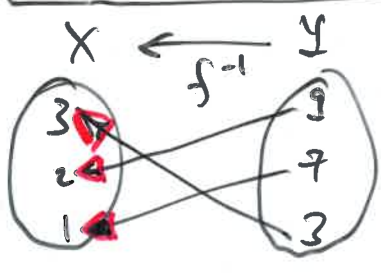
Faustregeln: f surjektiv $\iff$ f "trifft jedes Element von Y"

f injektiv $\iff$ f "schickt Verschiedene auf Verschiedene";

Bsp



bijektiv,



Umkehrabbildung zu f

Seien $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots \in \mathbb{R}$.

Wir wollen diese Zahlen aufsummieren.

Wir bilden die Folge

$$\left(\sum_{i=k}^{n} a_i \right)_{n \geq k}$$

Der Grenzwert dieser Folge ist

dann

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=k}^{n} a_i$$

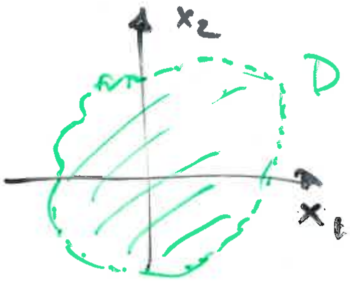
$$\underset{\text{anschaulich}}{=} a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$$

(Folgengrenzwerte dienen also dazu, definieren zu können, was eine solche unendliche Summe überhaupt sein soll.)

Fachbegriff: Reihe = unendliche Summe

n : Anzahl der Variablen

$D \subseteq \mathbb{R}^n$: Definitionsbereich



$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

heißt <u>stetig</u> in $\underline{x} \in D$, falls

für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$

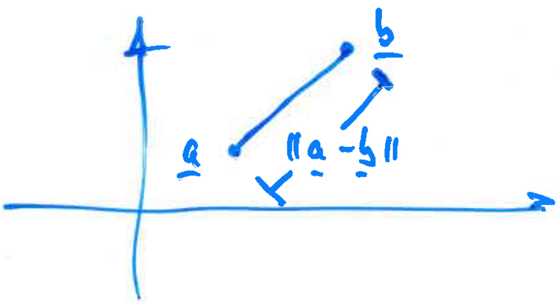
existiert mit

$$\underline{\tilde{x}} \in D \text{ und } \|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\| < \delta$$

$$\Longrightarrow \quad |f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x})| < \varepsilon$$

Dabei: $\|\underline{a} - \underline{b}\| = \left((a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2\right)^{1/2}$

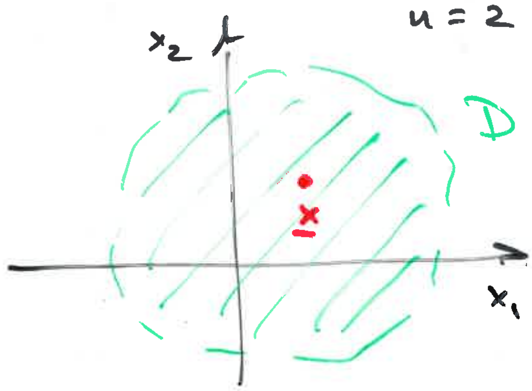
ist der Abstand von $\underline{a}$ und $\underline{b}$



Sei $n \geq 1$ die Anzahl der Variablen von f.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ der Definitionsbereich von f,

ausgenommen $\underline{x} \in D$.



Sei

$$f : D \setminus \{\underline{x}\} \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$\underline{\tilde{x}} \longmapsto f(\underline{\tilde{x}})$$

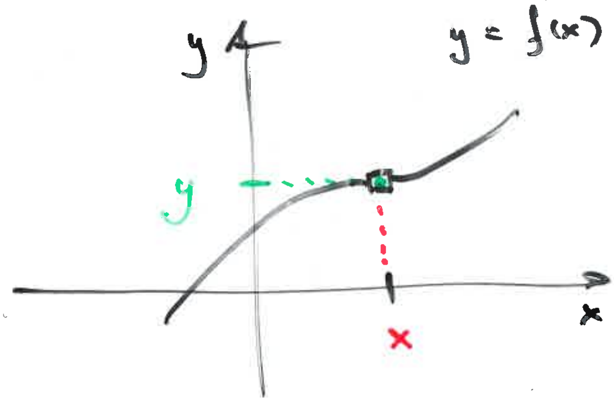
eine Funktion mit "Definitionslücke" $\underline{x}$.

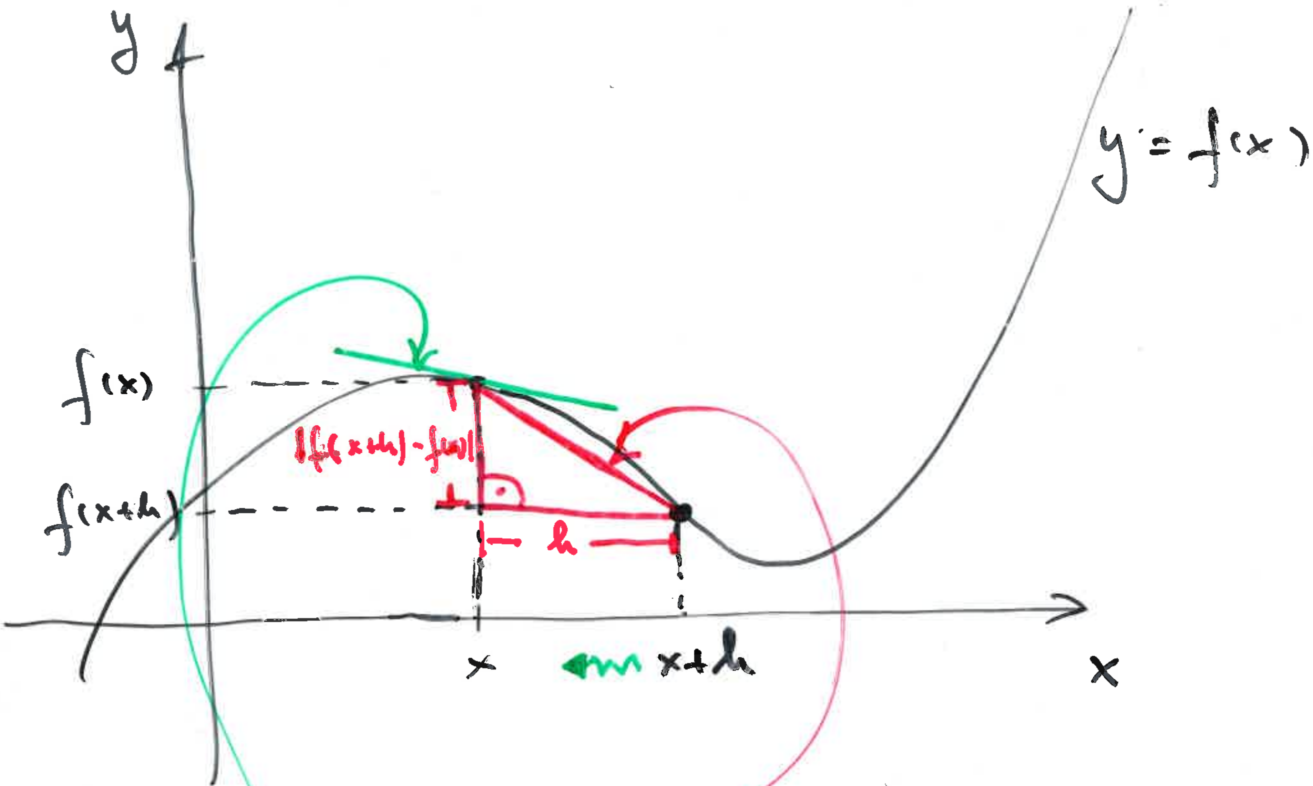
Sei $y \in \mathbb{R}$. Sei

$$\hat{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{\tilde{x}} \longmapsto \begin{cases} f(\underline{\tilde{x}}) & \text{falls } \underline{\tilde{x}} \neq \underline{x} \\ y & \text{falls } \underline{\tilde{x}} = \underline{x} \end{cases}$$

Falls $\hat{f}$ stetig ist, also "mit y keinen Sprung eingebaut bekommen hat", dann ist

$$\lim_{\hat{\underline{x}} \to \underline{x}} f(\underline{\tilde{x}}) = y$$





Steigung $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(mit negativem Vorzeichen)

Steigung $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$=: f'(x)$

Ableitung von f bei x

Sei $n \geq 1$ die Anzahl der Variablen.

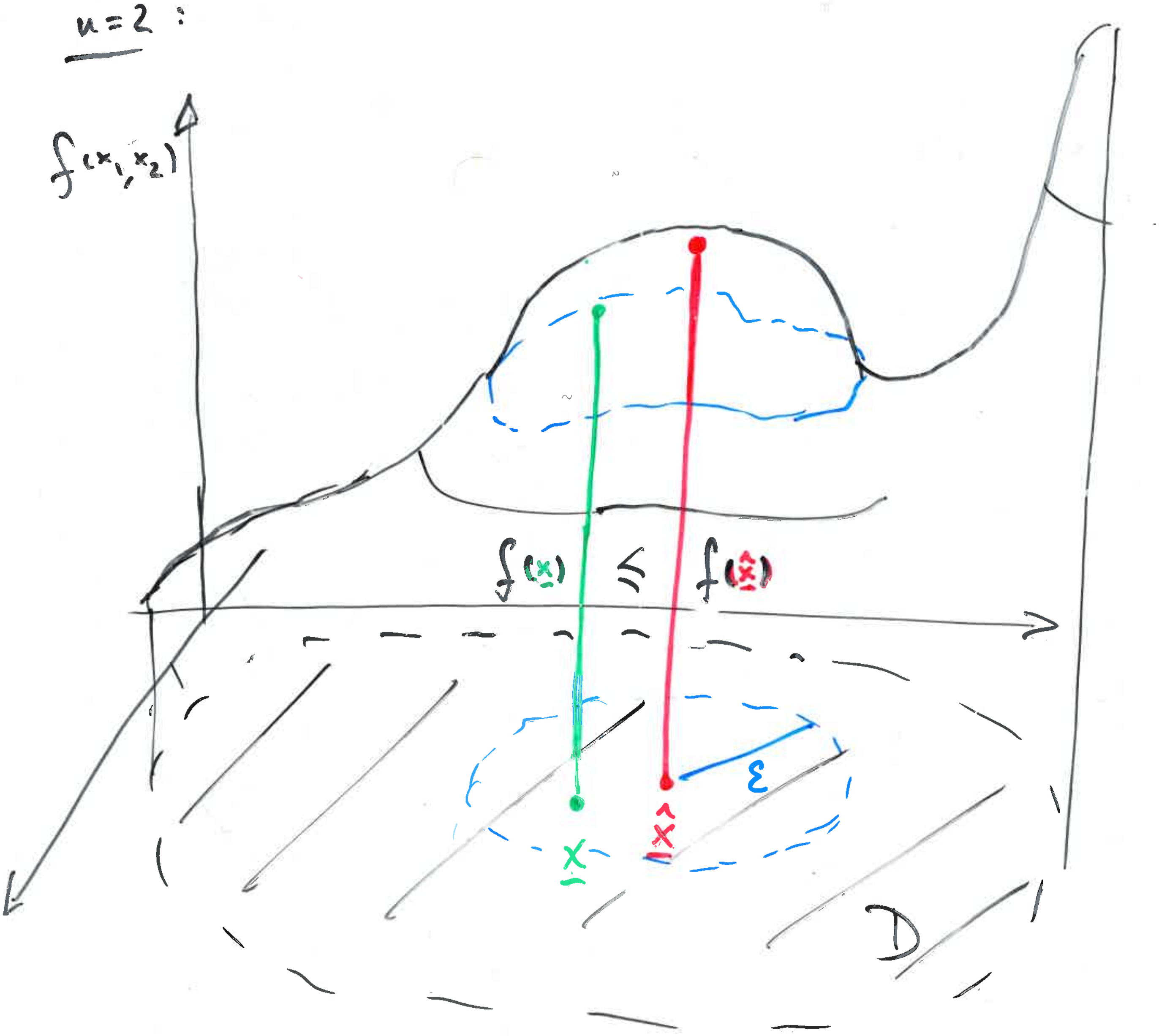
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Sei $f : D \to \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$
eine Funktion.

Es heißt $\hat{\underline{x}} \in D$ ein lokales Maximum von f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\underline{x} \in D \text{ und } \|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\| < \varepsilon \implies f(\underline{x}) \leq f(\hat{\underline{x}})$$

$n = 2$:



Bemerkung zur Vorsicht:

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1$$

Aber:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} \neq \sum_{k=n}^{2n} \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{2n} 0 = 0 .$$

Logarithmus zur Basis a:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

z.B.:

$$\frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \frac{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}}{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

$$\rightarrow \quad \log_a(x) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \log_b(x)$$

Beispiel:

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$$

$$\log_8(8) = \log_8(8^1) = 1$$

$$\ln(8) = \ln(2^3) = 3\cdot\ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\log_2(8)}_{3} = \underbrace{\frac{\ln(8)}{\ln(2)}}_{3} \cdot \underbrace{\log_8(8)}_{1}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ existiert und stetig seien

$(x_0, y_0) \in D$

Es heißt (x_0, y_0) Flach~~punkt~~stelle von f, falls $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ ist.

lok. Max.   lok. Min.   Sattelstelle

(1) Ist (x_0, y_0) Flachstelle von f und ist dort $f_{xx} < 0$ und $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, dann ist (x_0, y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

(2) Ist (x_0, y_0) Flachstelle von f und ist dort $f_{xx} > 0$ und $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, dann ist (x_0, y_0) eine lokale Minimalstelle von f

(3) Ist (x_0, y_0) Flachstelle von f und ist dort $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, dann ist (x_0, y_0) eine Sattelstelle von f.

T : Zinsperiode, z.B. $T = 1$ Jahr

K_0 : Anfangskapital, z.B. in Euro

$K_0 > 0$: Guthaben

$K_0 < 0$: Schulden

K_n : Kapital nach n Zinsperioden

p : Zinssatz (in Prozent)

$q := 1 + \frac{p}{100}$: Zinsfaktor

R : Rate, bei nachschüssiger Zahlung fällig am Ende jeder Zinsperiode

$R > 0$: Einzahlung

$R < 0$: Auszahlung, Entnahme

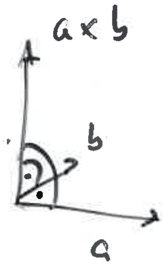
$$\boxed{K_n = q^n \cdot K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R}$$

bei nachschüssiger Zahlung

$$a = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\end{pmatrix}$$

Dann: • $a \times b$ senkrecht auf a und b



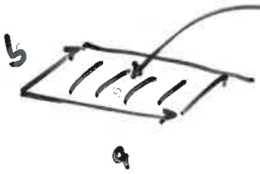
Also:

$$a^t \cdot (a \times b) = 0$$

$$b^t \cdot (a \times b) = 0$$

• Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist $\|a \times b\|$

Norm oder Länge von $a \times b$



$F = \|a \times b\|$

Ein **Vektorraum** besteht

aus einer Menge V, auf der

$$(+) : V \times V \longrightarrow V : (v, w) \longmapsto v + w$$

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V : (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

so erklärt sind, daß (V1–7) gelten.

(V1) Es gibt $0 \in V$ mit $v + 0 = v$

(V2) Für $v \in V$ gibt es $(-v) \in V$ mit $v + (-v) = 0$

(V3) $v + w = w + v$ für $v, w \in V$

(V4) $v + w + x := (v + w) + x = v + (w + x)$ für $v, w, x \in V$

(V5) $1 \cdot v = v$ für $v \in V$

(V6) $(\lambda + \mu) \cdot (v + w)$

$= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w + \mu \cdot v + \mu \cdot w$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$

(V7) $\lambda \cdot \mu \cdot v := (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$

V : Vektorraum (z.B. $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$)

T, U : Unterräume (z.B. $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$: Gerade

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$: Ebene)

Dann sind

$$T \cap U \subseteq V$$

und

$$T + U = \{ t + u : t \in T, u \in U \} \subseteq V$$

wieder Unterräume.

(z.B. $T \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0\}$,

$T + U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^{3\times 1}$)

Dabei gilt:

$$\dim(T + U) + \dim(T \cap U) = \dim(T) + \dim(U)$$

(z.B.: $3 + 0 = 1 + 2$)

Hauptsatz: $D \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $[a,b] \subseteq D$

(1) $f : D \to \mathbb{R}$ stetig

$F : D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f

(d.h. $F'(x) = f(x)$ für $x \in D$)

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

(2) $g : D \to \mathbb{R}$ stetig

$$G(x) := \int_a^x g(u)\,du \quad \text{für } x \in D$$

$\Longrightarrow$ G ist Stammfunktion von g

In der Situation von (1) schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx = [F(x)] = F(x) + \text{konst.}$$

Integrationstechniken

- Substitution

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \underset{\substack{u=g(x)\\ \frac{du}{dx}=g'(x)}}{=} \int_{x=a}^{x=b} f(\underbrace{g(x)}_{u})\cdot\frac{du}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx}$$

$$= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

- Partielle Integration:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \underset{\substack{F\text{ Stamm-}\\ \text{funktion}\\ \text{zu } f}}{=} [F(x)\cdot g(x)] - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

- Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{f(x)}{(x-s_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-s_m)^{k_m}}\,dx = \,?$$

Dabei: Zählergrad < Nennergrad (sonst erst Division mit Rest)

zu bestimmende Konstanten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$

Ansatz:

$$\frac{f(x)}{(x-s_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-s_m)^{k_m}} = \frac{a_{1,1}}{(x-s_1)^1} + \ldots + \frac{a_{1,k_1}}{(x-s_1)^{k_1}}$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{a_{m,1}}{(x-s_m)^1} + \ldots + \frac{a_{m,k_m}}{(x-s_m)^{k_m}}$$

Dann integrieren.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bel. oft diff'bar

$f^{(k)}$: k-te Ableitung von f

$f^{(0)}(x) = f(x)$
$f^{(1)}(x) = f'(x)$
$f^{(2)}(x) = f''(x)$
$\vdots$

Satz (Taylor):

Sei $x_0 \in D$. Sei $n \geq 0$. Für $x \in D$:

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{0!} f^{(0)}(x_0)(x-x_0)^0}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{1!} f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1}_{f'(x_0)\cdot(x-x_0)} + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom von } f \text{ um } x_0 \text{ der Ordnung } n}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}_{\text{Restglied}}$$

Taylorpolynom von f um x_0 der Ordnung n

Restglied
(wird normalerweise abgeschätzt; ist klein wegen des Faktors $\frac{1}{n!}$)

Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = 0$, dann:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Taylorreihe von f um x_0

$m \geq 1$

$D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

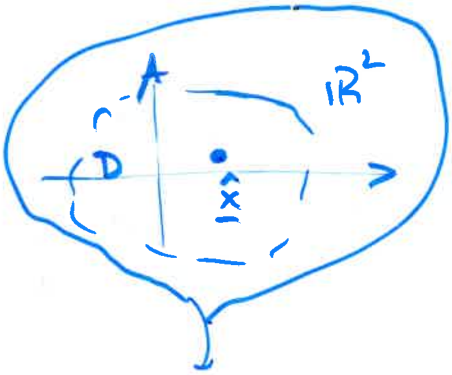
$$f: D \longrightarrow \mathbb{R} : \underbrace{\underline{x}}_{=(x_1,\dots,x_m)} \longmapsto \underbrace{f(\underline{x})}_{=f(x_1,\dots,x_m)}$$

beliebig oft partiell differenzierbar

Gradient: $$\nabla_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_m} \end{pmatrix}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

Hessematrix: $$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_m} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_mx_1} & f_{x_mx_2} & & f_{x_mx_m} \end{pmatrix}(\underline{x})$$

$$\in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \text{symmetrisch}$$



$\hat{\underline{x}} \in D$

$$f(\underline{x}) \approx \underbrace{\underbrace{f(\hat{\underline{x}}) + \overbrace{(\underline{x}-\hat{\underline{x}})}^{1\times m} \cdot \overbrace{\nabla_f(\hat{\underline{x}})}^{m\times 1}}_{\text{Näherungspolynom 1. Ordnung bei } \hat{\underline{x}}} + \frac{1}{2}\overbrace{(\underline{x}-\hat{\underline{x}})}^{1\times m} \cdot \overbrace{H_f(\hat{\underline{x}})}^{m\times m} \cdot \overbrace{(\underline{x}-\hat{\underline{x}})^t}^{m\times 1}}_{\text{Näherungspolynom 2. Ordnung bei } \hat{\underline{x}}}$$

Regeln für Determinanten:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(A) \in \mathbb{R}$

(1)

- Vertauschen von zwei Zeilen $\Rightarrow$ Faktor (-1) für det
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen $\Rightarrow$ keine Änderung
- Multiplikation einer Zeile mit λ $\Rightarrow$ Faktor λ für det

Genauso für Spalten, $\det(A) = \det(A^t)$

(2) Laplace-Entwicklung:

$A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A_{k,l} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$: in A Zeile k und Spalte l gestrichen

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} \, a_{k,l} \det(A_{k,l}) \quad \text{für } 1 \le l \le n$$

(Entwicklung nach Spalte l)

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} \, a_{k,l} \det(A_{k,l}) \quad \text{für } 1 \le k \le n$$

(Entwicklung nach Zeile k)

Praxis: (1) + (2) beide einsetzen

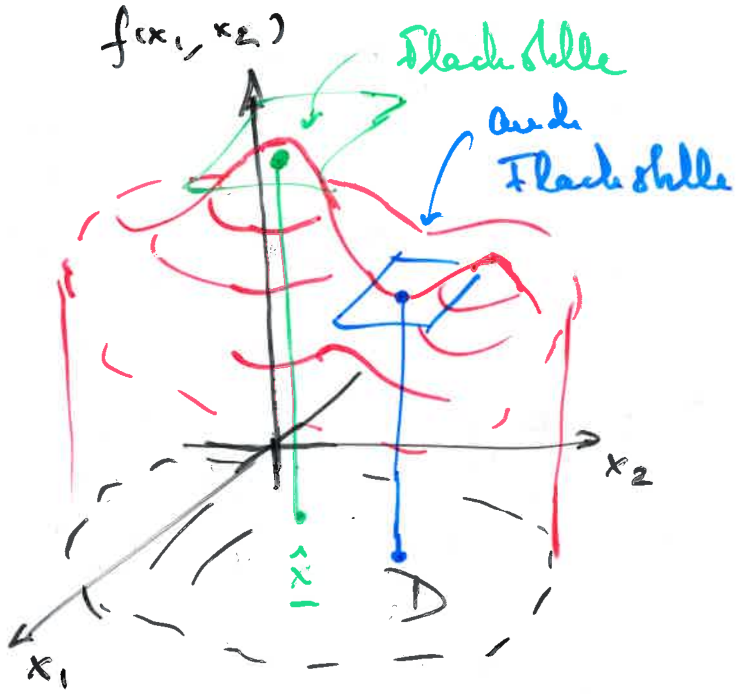
$n \geq 1$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$f : D \to \mathbb{R}$:

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\mapsto f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$



$\hat{\underline{x}}$: lokale Maximalstelle

1. Bestimmung der Flachstellen :

Man suche alle $\underline{x} \in D$ mit

$$\nabla_f(\underline{x}) = 0$$

2. Für jede Flachstelle $\underline{x}$ entscheiden :

$H_f(\underline{x})$ positiv definit $\Rightarrow$ $\underline{x}$ lok. Min.

$H_f(\underline{x})$ negativ definit $\Rightarrow$ $\underline{x}$ lok. Max.

$H_f(\underline{x})$ weder positiv noch negativ definit und $\det H_f(\underline{x}) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\underline{x}$ Sattelstelle

$n \geq 1$: Zahl der Variablen

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen : Definitionsbereich

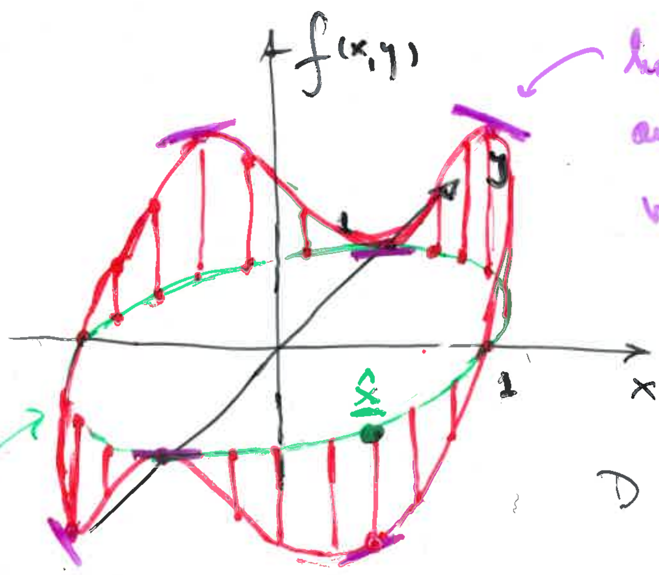
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} g_1 : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad\vdots \\ g_\ell : D \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ für Nebenbedingungen } \underbrace{g_1(\underline{x}) = 0, \ \dots, \ g_\ell(\underline{x}) = 0}_{\text{kurz: } g = 0}$$

Gesucht: lokale Extremstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Bsp. $f(x,y) = x^2 y$

$g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



horizontale Tangenten an den Flachstellen von f unter Nb $g = 0$

$D = \mathbb{R}^2$

hier: $g_1(x,y) = 0$, d.h. $x^2 + y^2 = 1$

Für Flachstellen $\underline{x}$ von f unter

Nb $g = 0$ löse man:

$$\begin{cases} g(\underline{x}) = 0 \\ \nabla_f(\underline{x}) = \underbrace{N(\underline{x})}_{\left(\nabla_{g_1}(\underline{x}) \cdots \nabla_{g_\ell}(\underline{x})\right)} \cdot \underbrace{r}_{\begin{pmatrix}\rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\ell\end{pmatrix}} \end{cases}$$

Ausführlich geschrieben:

Unbekannte

$$\begin{cases} g_1(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) = 0 \\ \vdots \\ g_\ell(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) = 0 \\ f_{x_1}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) = \underline{\rho_1} \cdot (g_1)_{x_1}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) + \ldots \\ \qquad + \underline{\rho_\ell} \cdot (g_\ell)_{x_1}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) = \underline{\rho_1} \cdot (g_1)_{x_n}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) + \ldots \\ \qquad + \underline{\rho_\ell} \cdot (g_\ell)_{x_n}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \end{cases}$$

Vorbereitung: Enthalte $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n \times (n-\ell)}$ in den Spalten eine Basis von $\{t \in \mathbb{R}^{n \times 1} : N(\hat{\underline{x}})^t \cdot t = 0\}$ für eine gefundene Flachstelle $\hat{\underline{x}}$ unter Nb $g = 0$.