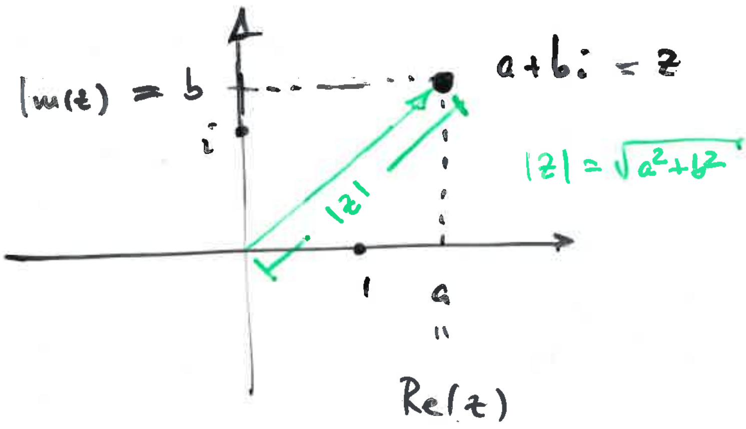
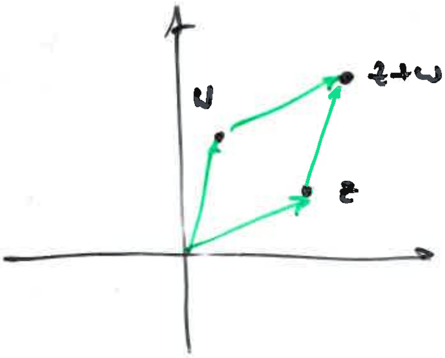
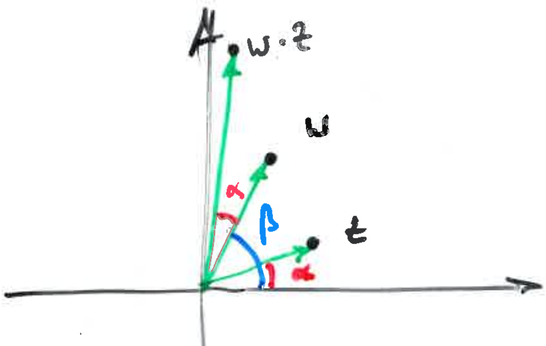
Komplexe Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \; : \; a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$







Und $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$

Addition:
Vektoraddition

Multiplikation:
- Winkel werden addiert
- Beträge werden multipliziert

Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$e^z = \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$= \frac{z^0}{0!} + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Exponentialfunktion

Vorbereitung:

Partialbruchzerlegung:

3. Bin. Formel

$$x^2+1 = (x-i)(x+i) \quad (*)$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} \overset{(*)}{=} \frac{1}{(x-i)^2 (x+i)^2}$$

unbekannt

$$= \frac{A}{(x-i)^1} + \frac{B}{(x-i)^2} + \frac{C}{(x+i)^1} + \frac{D}{(x+i)^2}$$

Beide Seiten mit $(x-i)^2(x+i)^2$ multiplizieren.

Koeffizientenvergleich in den entstehenden Polynomen.

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{i}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{i}{4}, \quad D = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{-\frac{i}{4}}{x-i} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\frac{i}{4}}{x+i} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+i)^2}$$

Heute: $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \;?$

Dazu: $f(x) = \underbrace{u(x)}_{\in \mathbb{R}} + i\,\underbrace{v(x)}_{\in \mathbb{R}}$ für $x \in [a,b]$,

$$\Longrightarrow \quad \int f(x)\,dx := \int u(x)\,dx + i \int v(x)\,dx$$

komplexwertig

reellwertig

Differentialgleichung:

Gesucht ist eine Funktion $x \mapsto y(x)$, die an jeder Stelle x eine Gleichung erfüllt, die $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, … und x enthalten darf.

Bsp: $y'(x) = 2y(x)$ ← kurz: $y' = 2y$

$y(x) = C \cdot e^{2x}$ ist Lösung auf $\mathbb{R}$,

wobei: $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante

Bsp: $x^2 \cdot y''(x) = 6 \cdot y(x)$ ← kurz: $x^2 y'' = 6y$

$y(x) = C \cdot x^3$ ist Lösung auf $\mathbb{R}$,

wobei: $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante

Gesucht: Funktion $y = y(x)$ mit

$$\underbrace{\boxed{y' = a(x)\cdot y + b(x)}}_{\text{lineare Differentialgleichung erster Ordnung}} \quad \text{und} \quad \underbrace{y(x_0) = y_0}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

Homogener Fall, $b(x) = 0$:

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)}\cdot y_0}$$

Inhomogener Fall, $b(x) \neq 0$:

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\,dt$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)}\left(F(x) + y_0\right)}$$

$$\boxed{y'' + 2a\cdot y' + b\cdot y = 0}$$ (homogen)

Fall $a^2 > b$: $y = y(x) = e^{-ax}\left(r e^{x\sqrt{a^2-b}} + s\, e^{-x\sqrt{a^2-b}}\right)$

Fall $a^2 < b$: $y = y(x) = e^{-ax}\left(r \sin(x\sqrt{b-a^2}) + s\cos(x\sqrt{b-a^2})\right)$

Fall $a^2 = b$: $y = y(x) = e^{-ax}(r + sx)$

Hierbei sind $r, s \in \mathbb{R}$ Konstanten, die mit den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind

---

$$\boxed{y'' + 2a\cdot y' + b\cdot y = c(x)}$$ (inhomogen)

Integrationsformel : Spezielle Lösung $\hat{u}(x)\cdot H(x)$

Fall $a^2 > b$: $y = y(x) = e^{-ax}\left(r e^{x\sqrt{a^2-b}} + s\, e^{-x\sqrt{a^2-b}}\right) + \hat{u}(x)\cdot H(x)$

Fall $a^2 < b$: $y = y(x) = e^{-ax}\left(r \sin(x\sqrt{b-a^2}) + s\cos(x\sqrt{b-a^2})\right) + \hat{u}(x) H(x)$

Fall $a^2 = b$: $y = y(x) = e^{-ax}(r + s\cdot x) + \hat{u}(x)\cdot H(x)$

Hierbei : $r, s \in \mathbb{R}$ Konstanten

Für bestimmte Funktionen $c(x)$ kann nun $\hat{u}(x)\, H(x)$ ersetzt werden durch eine einfacher zu erhaltende Funktion

Bsp

(b) $$y'' - y' + 2y = 2\cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

Gesucht: Alle Lösungen.

Prinzip: Jede Lösung ist von der Form

$$y(x) = \underbrace{y_1(x)}_{\substack{\text{beliebige Lösung von} \\ y''-y'+2y=0}} + \underbrace{y_2(x)}_{\substack{\text{eine fest gewählte Lösung von} \\ y''-y'+2y = 2\cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}}}$$

haben wir schon

suchen wir noch

Ansatz: $2\cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) e^{x/2} \overset{\text{Euler}}{=} \boxed{e^{\frac{x}{2}(1+i\sqrt{7})}} + \boxed{e^{\frac{x}{2}(1-i\sqrt{7})}}$

$y = v\, x\, e^{\frac{x}{2}(1+i\sqrt{7})} \Rightarrow v = -\frac{i}{\sqrt{7}}$ (gerechnet)

$y = v\, x\, e^{\frac{x}{2}(1-i\sqrt{7})} \Rightarrow v = \frac{i}{\sqrt{7}}$ (Rechnung genauso)

insgesamt
$$y_2 = y = -\frac{i}{\sqrt{7}}\, x\, e^{\frac{x}{2}(1+i\sqrt{7})} + \frac{i}{\sqrt{7}}\, x\, e^{\frac{x}{2}(1-i\sqrt{7})}$$
$$\overset{\text{Euler}}{=} \frac{2}{\sqrt{7}}\, x\, e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{e^{\frac{x}{2}}\left(r\sin\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) + s\cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)\right)}_{y_1(x)} + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}}\, x\, e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)}_{y_2(x)},$$

wobei $r, s \in \mathbb{R}$ konstant (können gemäß Anfangsbed. gewählt werden)