Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 1

Hausaufgabe 1

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{24}{(4-k)!k!}\, 3^{4-k}\, a^k = 0\,$?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a^i = 1\,$?

Lösung.

Wir erinnern uns an den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \text{ und } x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

(a) Es gilt

$$\frac{24}{(4-k)!k!} = \frac{4!}{(4-k)!k!} = \binom{4}{k}$$

Also können wir den binomischen Lehrsatz anwenden und erhalten für $n = 4$, $x = 3$ und $y = a$

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{24}{(4-k)!k!}\, 3^{4-k}\, a^k = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}\, 3^{4-k}\, a^k = (3+a)^4 \overset{!}{=} 0$$

Dies können wir umformen und erhalten

$$\begin{aligned} & (3+a)^4 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3+a &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & a &&= -3 \end{aligned}$$

Also gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{24}{(4-k)!k!}\, 3^{4-k}\, a^k = 0$ für $a = -3$.

(b) Wir verwenden erneut den binomischen Lehrsatz mit $n = 4$, $x = 1$ und $y = a$ und erhalten

$$\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a^i = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} 1^{4-i} a^i = (1+a)^4 \overset{!}{=} 1\ .$$

Dies umgeformt liefert

$$\begin{aligned} & (1+a)^4 &&= 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1+a &&= \pm 1 \\ \Leftrightarrow\ & a &&= -1 \pm 1 \end{aligned}$$

Demnach ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a^i = 1$ für $a \in \{-2, 0\}$.

Hausaufgabe 2 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Entscheiden Sie auf zeichnerische Weise, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f_1 : [-2, 1] \to [0, 5] : x \mapsto f_1(x) := |2x - 1|$

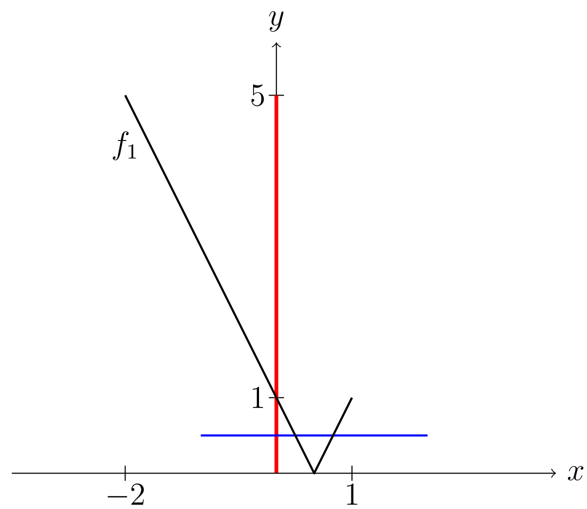
(b) $f_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_2(x) := \frac{1}{x}$

(c) $f_3 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] : x \mapsto f_3(x) := \sin(x)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to (0, 1] : x \mapsto f_4(x) := \frac{1}{1+x^2}$

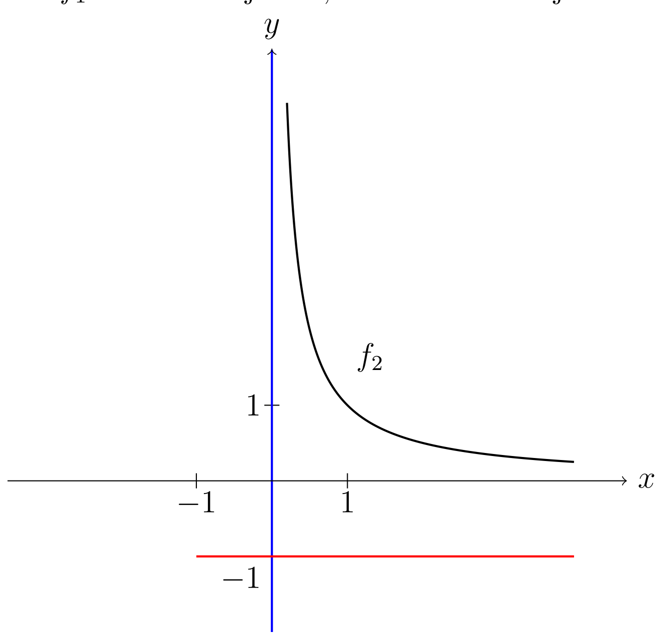
Lösung.

(a)



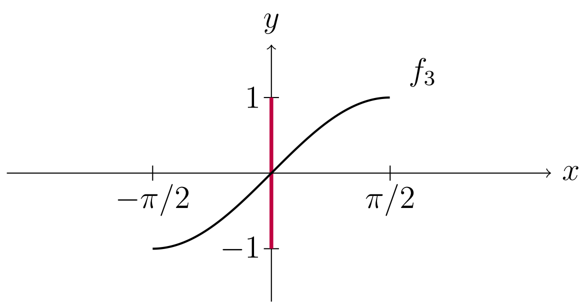
Injektivität: Die Funktion f_1 ist nicht injektiv, weil z.B. die blaue Gerade $y = \frac{1}{2}$ zwei Schnittpunkte mit dem Graphen von f_1 hat.
Surjektivität: Auf dem gesamten roten Intervall $[0, 5]$ haben Geraden $y = c$ mit $c \in [0, 5]$ mindestens einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f_1. Also ist f_1 surjektiv.
Bijektivität: Die Funktion f_1 ist nicht bijektiv, weil sie nicht injektiv ist.

(b)



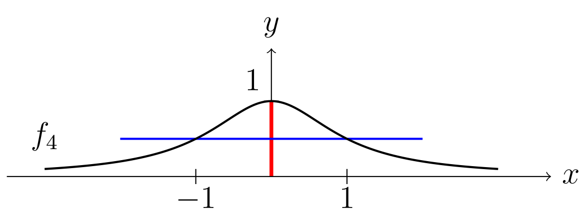
Injektivität: Auf dem gesamten blauen Intervall $\mathbb{R}$ haben Geraden $y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ höchstens einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f_2. Also ist f_2 injektiv.
Surjektivität: Die Funktion f_2 ist nicht surjektiv, weil z.B. die rote Gerade $y = -1$ keinen Schnittpunkt mit dem Graphen von f_2 hat.
Bijektivität: Die Funktion f_1 ist nicht bijektiv, weil sie nicht surjektiv ist.

(c)



Bijektivität: Auf dem gesamten lila Intervall $[-1, 1]$ haben Geraden $y = c$ mit $c \in [-1, 1]$ genau einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f_3. Also ist f_3 injektiv und surjektiv und damit bijektiv.

(d)



Injektivität: Die Funktion f_4 ist nicht injektiv, weil z.B. die blaue Gerade $y = \frac{1}{2}$ zwei Schnittpunkte mit dem Graphen von f_4 hat.
Surjektivität: Auf dem gesamten roten Intervall $(0, 1]$ haben Geraden $y = c$ mit $c \in (0, 1]$ mindestens einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f_4. Also ist f_4 surjektiv.
Bijektivität: Die Funktion f_4 ist nicht bijektiv, weil sie nicht injektiv ist.

Hausaufgabe 3 Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ und $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>1}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 + 1$$

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1}.

(c) Ist $f(g(x)) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$?

Lösung.

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, setzen wir $f(x) = y$ und lösen die entstandene Gleichung nach $x = f^{-1}(y)$ auf.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} && y = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{y} = x \end{aligned}$$

Damit ist die Umkehrfunktion gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} && y &= x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow && y - 1 &= x^2 \\ \underset{y \in \mathbb{R}_{>1}}{\overset{x \in \mathbb{R}_{>0}}{\Leftrightarrow}} && \sqrt{y-1} &= x \end{aligned}$$

Damit ist die Umkehrfunktion gegeben durch

$$g^{-1} : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0} : y \mapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$$

(c) Nein, es gilt nicht $f(g(x)) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Um das zu zeigen, geben wir ein konkretes Gegenbeispiel an: Wir wählen $x = 1$. Dann folgt

$$f(g(1)) = f\left(1^2 + 1\right) = f(2) = \frac{1}{2}$$

und

$$g(f(1)) = g\left(\frac{1}{1}\right) = g(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Damit ist also $f(g(x)) \neq g(f(x))$ für $x = 1$. Es folgt, dass $f(g(x)) = g(f(x))$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten kann.

Hausaufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x - 1|$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

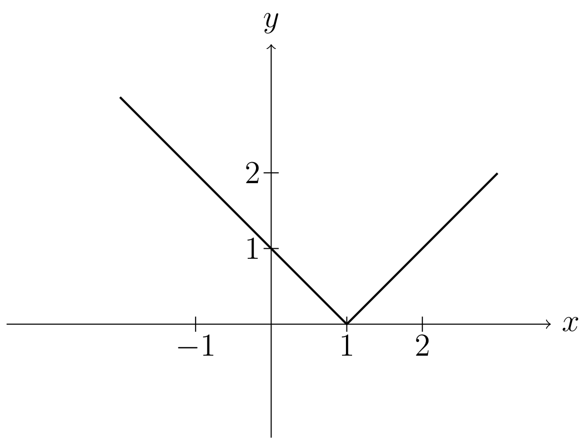
(b) Bestimmen Sie $f([-1, 2])$.

(c) Bestimmen Sie $f^{-1}([1, 2])$.

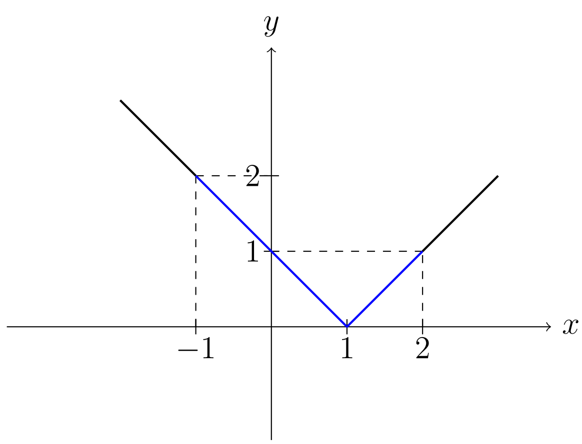
(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(f(x))$.

Lösung.

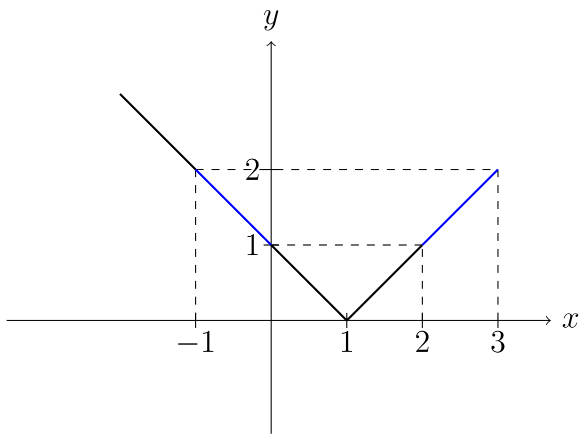
(a)



(b) Wir können an der Skizze ablesen, dass $f([-1, 2]) = [0, 2]$ gilt:



(c) Aus der Skizze lässt sich auch ab lesen, dass $f^{-1}([1, 2]) = [-1, 0] \cup [2, 3]$ ist:



(d) Für die Funktion g gilt

$$g(x) = f(f(x)) = f(|x-1|) = ||x-1|-1|$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:
Für $x \geqslant 1$ gilt $g(x) = ||x-1|-1| = |x-2|$.
Für $x < 1$ gilt $g(x) = |(1-x)-1| = |-x|$.
Damit sieht der Graph von g wie folgt aus: