Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 2

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 5

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := \frac{4}{x^2+2}$.

Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

(b) Sei $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x) := x - x^{-1}$. Skizzieren Sie den Graphen von u.

Bestimmen Sie $u^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, indem Sie $y = x - x^{-1}$ mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach x auflösen. Welches Vorzeichen sollte hierbei gewählt werden?

Lösung.

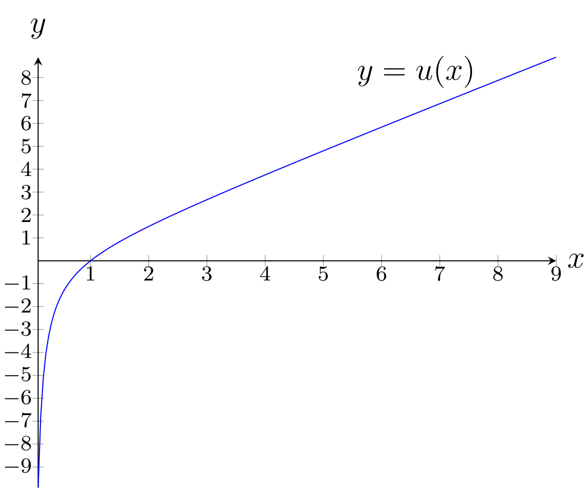
(a) Es ist

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{4}{(\frac{1}{1+x^2})^2 + 2} = \frac{4}{(\frac{1}{1+2x^2+x^4}) + 2} = \frac{4}{\frac{3+4x^2+2x^4}{1+2x^2+x^4}} = \frac{4+8x^2+4x^4}{3+4x^2+2x^4}$$

und

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 + (\frac{4}{x^2+2})^2} = \frac{1}{1 + \frac{16}{x^4+4x^2+4}} = \frac{1}{\frac{x^4+4x^2+20}{x^4+4x^2+4}} = \frac{x^4+4x^2+4}{x^4+4x^2+20} \, .$$

(b) Die folgende Skizze zeigt den Graphen von u.



Die Umkehrabbildung $u^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist diejenige Abbildung, mit der Eigenschaft, dass $u(x) = y$ genau dann gilt, wenn $x = u^{-1}(y)$ ist.

Es ist $y = x - x^{-1}$ genau dann, wenn $x^2 - xy - 1 = 0$ ist. D.h. genau dann, wenn $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$ ist.

Da $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und da $\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{y^2}{4}} < \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$ ist, folgt $x = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$.

Somit ist $u^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \,: y \mapsto \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$ die Umkehrabbildung zu u.

Hausaufgabe 6 Sei $X := \{\, z \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leqslant z \leqslant 7 \,\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sei

$$f : X \to \{-1, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } x \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Finden Sie Teilmengen $A, B, C \subseteq X$, welche die Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen:

(1) Die Mengen A, B bestehen aus je drei Elementen.

(2) Es besteht $A \cap B$ aus 2 Elementen.

(3) Es ist $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(4) Es ist $f(A \cap B) = f(C)$ und $C \neq A \cap B$.

Lösung. Eine Möglichkeit ist $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{1, 3, 4\}$ und $C := \{5\}$.
Nun ist $A \cap B = \{1, 3\}$. Es ist $f(1) = -1$ und $f(3) = -1$. Also folgt $f(A \cap B) = \{-1\}$.
Es ist $f(1) = -1 = f(3)$ und $f(2) = 1 = f(4)$. Also folgt $f(A) = \{-1, 1\} = f(B)$.
Insgesamt ist $f(A \cap B) = \{-1\} \neq \{-1, 1\} = \{-1, 1\} \cap \{-1, 1\} = f(A) \cap f(B)$.
Es ist $A \cap B = \{1, 3\} \neq \{5\} = C$ und $f(A \cap B) = \{-1\} = f(C)$.

Hausaufgabe 7 Bestimmen Sie unter Verwendung des Sandwichlemmas.

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + \sin(n^2)}{n^2 + n + 1}$

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k^2}$

Lösung.

(a) Nach den Grenzwertregeln ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + \sin(n^2)}{n^2 + n + 1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 + n + 1} + \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2 + n + 1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2 + n + 1} \\ &= 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2 + n + 1} \;. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{-1}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sin(n^2)}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{1}{n^2 + n + 1} \;.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2+n+1} = 0$ ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = 0$ ist, ist nach dem Sandwichlemma auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2+n+1} = 0\ .$$

Insgesamt folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sin(n^2)}{n^2+n+1} = 1$.

(b) Es ist

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} = (n+1)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\ .$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0$ ist, folgt nach dem Sandwichlemma auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k^2} = 0$.

Hausaufgabe 8

(a) Bestimmen Sie $x := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2-1}$ mittels Grenzwertregeln.

(b) Überprüfen Sie mittels der Definition für Grenzwerte, dass Ihre Antwort in Teil (a) richtig ist. Man hat also zu überprüfen: Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ mit $|x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$.

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : |x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\}$ der genannten Ungleichung.
- Welche $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ sind wählbar, um die Bedingung zu erfüllen, es solle $|x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon$ sein für $n \geqslant \ell$?

Lösung.

(a) Es ergibt sich $x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$ mittels Grenzwertregeln.

(b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned}
\{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : |x - \tfrac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\} &= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : |2 - \tfrac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\} &&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : |\tfrac{2n^2-2}{n^2-1} - \tfrac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\} \\
&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : |\tfrac{-2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\} &&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : \tfrac{2}{n^2-1} < \varepsilon \,\} \\
&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : \tfrac{2}{\varepsilon} < n^2 - 1 \,\} &&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : \tfrac{2}{\varepsilon} + 1 < n^2 \,\} \\
&= \{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} : \sqrt{\tfrac{2}{\varepsilon} + 1} < n \,\}\ .
\end{aligned}$$

Man hat also $\ell \in \mathbb{Z}_{>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}+1}}$ zu wählen, damit $|2 - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon$ ist für $n \geqslant \ell$.

Insbesondere findet man wenigstens ein solches ℓ. Das bestätigt den in (a) gefundenen Grenzwert direkt nach Definition.