Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 4

Hausaufgabe 13 Man berechne für die Funktion $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ die Ableitung f'.

(a) $f(x) = x^5 \sin(x)$ auf $D = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \ln(\sin(x))$ auf $D = (0, \pi)$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ auf $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(d) $f(x) = x^x$ auf $D = \mathbb{R}_{>0}$

Lösung.

(a) Nach der Produktregel gilt

$$\big(x^5 \sin(x)\big)' = \big(x^5\big)' \sin(x) + x^5\,(\sin(x))' = 5x^4 \sin(x) + x^5 \cos(x)$$

(b) Nach der Kettenregel gilt

$$(\ln(\sin(x)))' = \ln'(\sin(x)) \cdot (\sin(x))' = \frac{1}{\sin(x)} \cos(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

(c) Nach der Quotientenregel gilt

$$\left(\frac{e^x}{\cos(x)}\right)' = \frac{(e^x)' \cos(x) - e^x (\cos(x))'}{\cos(x)^2} = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{\cos(x)^2}$$

(d) Wir schreiben zunächst $x^x = e^{x \ln(x)}$. Dann folgt mit der Ketten- und Produktregel, dass

$$\big(e^{x \ln(x)}\big)' = \exp'(x \ln(x)) \cdot (x \ln(x))' = e^{x \ln(x)} \cdot \big((x)' \ln(x) + x\,(\ln(x))'\big) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Hausaufgabe 14

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_t(x) := \mathrm{e}^{tx}$.
Bestimmen Sie $\{\, t \in \mathbb{R} \;:\; \text{Es ist } 2f_t''(x) + 9f_t'(x) - 5f_t(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \,\}$.

(b) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(3) > \ln(2)\}$.

Lösung.

(a) Es gilt $f_t'(x) = t\mathrm{e}^{tx}$ und $f_t''(x) = t^2\mathrm{e}^{tx}$. Damit folgt

$$2f_t''(x) + 9f_t'(x) - 5f_t(x) = (2t^2 + 9t - 5)\mathrm{e}^{tx} \overset{!}{=} 0$$

Da $\mathrm{e}^{tx} \neq 0$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$ ist, muss also $(2t^2 + 9t - 5) = 0$ gelten. Mit der Mitternachtsformel erhalten wir die Nullstellen

$$t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4}$$

Also sind die Nullstellen $t_1 = -5$ und $t_2 = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\{\, t \in \mathbb{R} \;:\; \text{Es ist } 2f_t''(x) + 9f_t'(x) - 5f_t(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \,\} = \left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$$

(b) Wir formen die Ungleichung um:

$$\begin{aligned}
& & \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(3) &> \ln(2) \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\ln(x) &> \ln(2) + \ln(3) \\
&\Leftrightarrow & \ln(x) &> 2\ln(6) \\
&\Leftrightarrow & x &> \mathrm{e}^{\ln(6^2)} \\
&\Leftrightarrow & x &> 36
\end{aligned}$$

Also ist

$$\{x \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(3) > \ln(2)\} = \mathbb{R}_{>36}$$

Hausaufgabe 15 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto f(x) := 2^x$.
Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : y \mapsto g(y)$ ihre Umkehrfunktion.

(a) Bestimmen Sie $g'(y)$ unter Verwendung der Formel $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g(y)$. Verwenden Sie dies für eine direkte Berechnung von $g'(y)$.

Lösung.

(a) Wir wissen nach der Vorlesung, dass $f'(x) = 2^x \ln(2) = \ln(2)f(x)$ gilt. Setzen wir $x = g(y)$ ein, so erhalten wir

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\ln(2)f(g(y))} \overset{g \text{ ist Umkehrfunktion von } f}{=} \frac{1}{\ln(2)y}$$

(b) Die Umkehrfunktion von $f(x) = 2^x$ lautet $g(y) = \log_2(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(2)}$. Leiten wir dies ab, erhalten wir ebenfalls

$$g'(y) = \frac{1}{\ln(2)y}$$

Hausaufgabe 16 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := (x^2 - 1)\mathrm{e}^x$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f.

(c) Überprüfen Sie, dass f auf dem Intervall $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ streng monoton fällt.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f. (Dazu können Sie einen Taschenrechner verwenden.)

Lösung.

(a) Da $\mathrm{e}^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind die Nullstellen von f nur die Nullstellen von $(x^2 - 1)$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

(b) Wir berechnen zunächst die Ableitung f'. Nach der Produktregel gilt

$$f'(x) = (x^2 - 1)'\mathrm{e}^x + (x^2 - 1)\,(\mathrm{e}^x)' = (2x)\mathrm{e}^x + (x^2 - 1)\mathrm{e}^x = (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$$

Außerdem benötigen wir die zweite Ableitung. Diese berechnen wir analog und erhalten

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2 + 2x - 1)'\mathrm{e}^x + (x^2 + 2x - 1)\,(\mathrm{e}^x)' = (2x + 2)\mathrm{e}^x + (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x \\ &= (x^2 + 4x + 1)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Die kritischen Stellen sind bei $f'(x) = 0$. Dazu müssen wir also $(x^2 + 2x - 1) = 0$ setzen und erhalten

$$\begin{aligned} & & x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & (x+1)^2 - 2 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & x &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Also sind $x_3 = -1 - \sqrt{2}$ und $x_4 = -1 + \sqrt{2}$ die kritischen Stellen. Um diese weiter zu charakterisieren, berechnen wir $f''(x_3)$ und $f''(x_4)$. Es ist

$$\begin{aligned} f''(x_3) &= ((-1 - \sqrt{2})^2 + 4(-1 - \sqrt{2}) + 1)\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}} \\ &= (1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4 - 4\sqrt{2} + 1)\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}} \\ &= \underbrace{(-2\sqrt{2})}_{<0}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x_4) &= (-1 + \sqrt{2})^2 + 4(-1 + \sqrt{2}) + 1)\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}} \\ &= (1 - 2\sqrt{2} + 2 - 4 + 4\sqrt{2} + 1)\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}} \\ &= \underbrace{(2\sqrt{2})}_{>0}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Da $f''(x_3) < 0$ und $f''(x_4) > 0$ gilt, ist x_3 eine lokale Maximalstelle und x_4 eine lokale Minimalstelle.

(c) Damit f auf dem Intervall $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ streng monoton fällt, genügt es, $f'(x) < 0$ für $x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x = \big(\underbrace{(x+1)^2 - 2}_{<0}\big) \underbrace{\mathrm{e}^x}_{>0} < 0$$

für $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$.

(d)