Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 5

Hausaufgabe 17 Man berechne die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{(e^x-1)^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)^2}{\sin(x^2)}$

Lösung.

Wir verwenden die Regel von l'Hôpital um die Grenzwerte zu berechnen:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2(e^x-1)e^x} \overset{\text{Kürzen}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}$$

(c) Zunächst ist

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} \; .$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, dürfen wir den Grenzwert in den Exponenten ziehen. Wir betrachten demnach in einer Zwischenrechnung

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \; .$$

Also folgt insgesamt

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1 \; .$$

(d) Es wird

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2}{\sin(x^2)} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\cos(x)}{\cos(x^2)}}_{\to 1} = 1$$

unter Beachtung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$.

Hausaufgabe 18 Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 + 6x + 2(y-1)^2 \mathrm{e}^y$$

(a) Bestimmen Sie die Flachstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die Sattelstellen von f.

Lösung.

(a) Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 6 \\ f_y &= 2(y-1)^2 \mathrm{e}^y + 4(y-1)\mathrm{e}^y = (2y^2 - 2)\mathrm{e}^y = 2(y+1)(y-1)\mathrm{e}^y \ . \end{aligned}$$

Für eine Flachstelle muss $f_x = 0$ und $f_y = 0$ gelten. Also erhalten wir $x_1 = -3$ aus $2x + 6 = 0$ und $y_{1,2} = \pm 1$ aus $2(y+1)(y-1)\mathrm{e}^y = 0$. Damit hat f die zwei Flachstellen

$$\{(-3, -1), (-3, 1)\}$$

(b) Um die Flachstellen zu charakterisieren, bestimmen wir die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 0 \\ f_{yy} &= 2(y^2 - 1)\mathrm{e}^y + 4y\mathrm{e}^y = 2(y^2 + 2y - 1)\mathrm{e}^y \end{aligned}$$

Wir setzen die Stelle $(-3, -1)$ in die Formel $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ ein und erhalten

$$2 \cdot 2((-1)^2 + 2(-1) - 1)\mathrm{e}^{-1} = -8\mathrm{e}^{-1} < 0$$

Damit folgt, dass $(-3, -1)$ eine Sattelstelle ist.
Analog bestimmen wir für $(-3, 1)$ den Wert von $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ und erhalten

$$2 \cdot 2(1^2 + 2 \cdot 1 - 1)\mathrm{e}^1 = 8\mathrm{e} > 0$$

Weil auch $f_{xx} = 2 > 0$ an der Stelle $(-3, 1)$ gilt, folgt, dass dies eine lokale Minimalstelle ist.

Hausaufgabe 19

(a) Es sei $K_0 = 10.000$ Euro zu einem jährlichen Zinssatz von p Prozent angelegt. Zusätzlich wird jedes Jahr vorschüssig eine Rate von 1000 Euro eingezahlt. Bestimmen Sie das Kapital nach 10 Jahren in Abhängigkeit vom Zinsfaktor q.

(b) Es sei $K_0 = -10.000$ Euro. Sei ein Monatszins von p Prozent vereinbart. Wie hoch muss die nachschüssige monatliche Rate R sein, damit der Kredit nach 5 Jahren abbezahlt ist? Geben Sie R in Abhängigkeit vom Zinsfaktor q an.

(c) Für diese Teilaufgabe dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

Bestimmen Sie das Resultat in (a) für $p = 5$ Prozent.

Bestimmen Sie das Resultat in (b) für $p = 0{,}2$ Prozent.

Lösung.

(a) Die Formel für das Kapital K_n nach n Zinsperioden bei vorschüssiger Zahlung mit einem Startkapital K_0, einer Rate R und einem Zinsfaktor von $q = 1 + \frac{p}{100}$ lautet

$$K_n = q^n K_0 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R$$

Wir setzen alle bekannten Größen ein und erhalten

$$K_{10} = q^{10} \cdot 10.000 + q \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot 1.000$$

(b) Die Formel für die Rate R bei nachschüssiger Zahlung, n Zinsperioden, einem Startkapital K_0 und einem Endkapital K_n mit einem Zinsfaktor von $q = 1 + \frac{p}{100}$ lautet

$$R = \frac{q - 1}{q^n - 1}(K_n - q^n K_0)$$

Wir setzen alle bekannten Größen ein und erhalten

$$R = \frac{q - 1}{q^{60} - 1}(0 - q^{60} \cdot (-10.000)) = \frac{q - 1}{q^{60} - 1} q^{60} \cdot 10.000$$

(c) Wir setzen $q = 1{,}05$ in (a) ein und erhalten

$$K_{10} = (1{,}05)^{10} \cdot 10.000 + 1{,}05 \cdot \frac{(1{,}05)^{10} - 1}{1{,}05 - 1} \cdot 1.000 \approx 29.495{,}73$$

Wir setzen $q = 1{,}002$ in (b) ein und erhalten

$$R = \frac{1{,}002 - 1}{(1{,}002)^{60} - 1}(1{,}002)^{60} \cdot 10.000 \approx 177{,}03$$

Hausaufgabe 20 Ein Grundkapital von $K_0 = 10.000$ Euro werde zum jährlichen Zinssatz p Prozent angelegt. Es werde nachschüssig jährlich eine Rate R eingezahlt.

(a) Sei $R = 0$ Euro. Wie lange dauert es, bis sich das Grundkapital verdoppelt hat? Geben Sie dies in Abhängigkeit vom Zinsfaktor q an.

(b) Sei $R = 1000$ Euro. Wie lange dauert es, bis sich das Grundkapital verdoppelt hat? Geben Sie dies in Abhängigkeit vom Zinsfaktor q an.

(c) Für diese Teilaufgabe dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

Bestimmen Sie die Resultate in den Teilaufgaben (a) und (b) für $p = 5$ Prozent.

Lösung.

Die Formel für die Dauer n bei nachschüssiger Zahlung, einem Startkapital K_0, eine Endkapital K_n und einer Rate R bei einem Zinsfaktor von $q = 1 + \frac{p}{100}$ lautet

$$n = \frac{1}{\ln(q)} \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right)$$

(a) Wir setzen alle bekannten Größen ein und erhalten

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(q)}$$

(b) Wir setzen alle bekannten Größen ein und erhalten

$$n = \frac{1}{\ln(q)} \ln\left(\frac{20.000 + \frac{1.000}{q-1}}{10.000 + \frac{1.000}{q-1}}\right)$$

(c) Wir setzen $q = 1{,}05$ in (a) ein und erhalten

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}21$$

Setzen wir $q = 1{,}05$ in (b) ein, so erhalten wir

$$n = \frac{1}{\ln(1{,}05)} \ln\left(\frac{20.000 + \frac{1.000}{1{,}05-1}}{10.000 + \frac{1.000}{1{,}05-1}}\right) \approx 5{,}90$$