Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 6

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 21

(a) Auf ein Bankkonto werden am Anfang jedes Jahres 1.000€ eingezahlt. Sei das Anfangskapital $K_0 = 0€$. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit $p\%$ verzinst, wobei $p \geqslant 0$. Nach 2 Jahren beträgt das Guthaben 3.750€ . Wie hoch ist der Zinssatz p?

(b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 25% angelegt werden. Jeweils zum Jahresende soll eine Auszahlung von 500€ getätigt werden. Wie hoch muss K_0 sein, damit nach 3 Jahren das Kapital aufgebraucht ist?

Lösung.

(a) Für vorschüssige Zahlungen gilt $K_n = q^n \cdot K_0 + q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot R$. Für $n = 2$, $K_2 = 3.750€$, $R = 1.000€$ und $K_0 = 0€$ ist somit

$$3.750 = q \cdot \frac{q^2 - 1}{q-1} \cdot 1.000 = (q^2 + q) \cdot 1.000$$

genau dann, wenn $3{,}75 = q^2 + q$ ist, d.h. genau dann, wenn $q = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{2} = -\frac{1}{2} \pm 2$ ist. Da $p \geqslant 0$ ist und $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist, ist auch $q > 0$. Somit ist $q = \frac{3}{2}$ und $p = 50\%$.

(b) Für nachschüssige Zahlungen gilt $K_0 = q^{-n} \left(K_n - \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot R \right)$. Für $n = 3$, $K_3 = 0€$, $R = -500€$ und $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}25 = \frac{5}{4}$ ist somit

$$\begin{aligned}
K_0 &= \left(\tfrac{5}{4}\right)^{-3} \left(0 - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1}{\frac{5}{4} - 1} \cdot (-500€) \right) = \left(\tfrac{5}{4}\right)^{-3} \left(\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1}{\frac{1}{4}} \cdot 500€ \right) \\
&= 2.000€ \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^{-3} \left(\left(\tfrac{5}{4}\right)^3 - 1 \right) = 2.000€ - 2.000€ \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^3 \\
&= 2.000€ - 2.000€ \cdot \tfrac{64}{125} = 2.000€ - 16€ \cdot 64 = 2.000€ - 1024€ \\
&= 976€ \ .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 22 Für diese Aufgabe dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

(a) Eine Gesellschaft erwirbt ein Gebäude für 750.000€. Nach 5 Jahren wird das Gebäude für 800.000€ verkauft. Wieviel ist das Gebäude aus heutiger Sicht wert, wenn man einen Kalkulationszinssatz von 3% annimmt, d.h. wieviel Geld hätte man zu einem Zinssatz von 3% anlegen müssen, damit das Guthaben nach 5 Jahren 800.000€ beträgt? Hat die Gesellschaft klug investiert?

(b) Würde sich die Investition lohnen, wenn man einen niedrigeren Zinssatz von 1% p.a. annimmt?

(c) Bis zu welchem Zinssatz lohnt sich die Investition?

Lösung.

(a) Es ist $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n}$. Für $n = 5$, $K_5 = 800.000$€ und $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}03$ ergibt sich

$$K_0 = \frac{800.000€}{(1{,}03)^5} = 690.087{,}03€ \ .$$

Folglich ist das Gebäude aus heutiger Sicht 690.087,03€ wert. Da die Gesellschaft für das Gebäude 750.000€ bezahlt hat, war es keine kluge Investition.

(b) Für $n = 5$, $K_5 = 800.000$€ und $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}01$ ergibt sich

$$K_0 = \frac{800.000€}{(1{,}01)^5} = 761.172{,}55€ \ .$$

In diesem Fall würde sich die Investition lohnen.

(c) Wir bestimmen den Zinsfaktor $q > 0$ so, dass die Ungleichung

$$750.000€ \ < \ \frac{800.000€}{q^5}$$

gilt; vgl. (a). Diese Ungleichung ist äquivalent zu $750.000 \cdot q^5 < 800.000$, also zu $q^5 < \frac{16}{15}$, also zu

$$q \ < \ \left(\frac{16}{15}\right)^{1/5} \ \approx \ 1{,}0130 \ .$$

Somit lohnt sich die Investition bei einem Zinssatz von $(-100\% <) \ p < 1{,}30\%$.

Hausaufgabe 23

(a) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\}$.

(c) Sei $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Bestimmen Sie alle Matrizen $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $BC = \mathrm{E}_2$.

Lösung.

(a) Um $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ zu berechnen, muss man $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mid \mathrm{E}_3\right)$ umformen, bis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ in Zeilenstufenform ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right).$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Wir formen folgendermaßen um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 56 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die einzige nicht gesäuberten Spalte von A ist die 4. Spalte. Also besteht eine Basis von $\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\}$ aus einem Vektor. Zur Verdeutlichung schreiben wir den Eintrag in der 4. Zeile in ein Kästchen: hier tragen wir eine 1 ein. Die restlichen Einträge des Vektors füllen wir so auf, dass der Vektor in $\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\}$ liegt. Dazu tragen wir in den Vektor, in dem in der 4-ten Zeile eine 1 steht, das Negative der Einträge in der 4-ten Spalte der Zeilenstufenform von A ein.

Damit ergibt sich für die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

(c) Jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ist von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Nun ist

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_2$$

genau dann, wenn $a = 1$, $b = 0$, $e = 0$ und $f = 1$ ist. Somit ist $BC = \mathrm{E}_2$ für alle $C \in \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} : c,\, d \in \mathbb{R}\right\}$.

Hausaufgabe 24 Seien $a := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie das von a, b, c aufgespannte Parallelepiped.

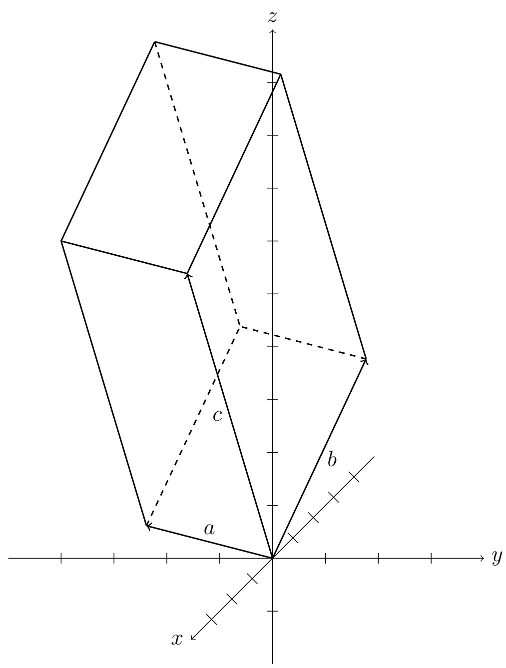
(b) Bestimmen Sie den Cosinus des von b und c eingeschlossenen Winkels.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von b und c aufgespannten Parallelogramms.

(d) Berechnen Sie das Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelepipeds.

Lösung.

(a)



(b) Ist φ der von b und c eingeschlossene Winkel, so ist

$$\cos(\varphi) = \frac{b^{\mathrm{t}} c}{\|b\| \cdot \|c\|} = \frac{-2\cdot(-1) + 1\cdot(-2) + 3\cdot 5}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{7}} \,.$$

(c) Für den Flächeninhalt des von b und c aufgespannten Parallelogramms erhält man

$$\|b \times c\| = \left\| \begin{pmatrix} 1\cdot 5 - 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-1) - (-2)\cdot 5 \\ -2\cdot(-2) - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{195} \,.$$

(d) Für das Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelepipeds erhält man

$$|a^{\mathrm{t}}(b \times c)| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |1\cdot 11 + (-2)\cdot 7 + 1\cdot 5| = |2| = 2 \,.$$