Günthner, Krauß, Künzer | Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 8

Hausaufgabe 29 Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir substituieren $u = \ln(x)$. Mit $u' = \frac{1}{x}$ erhalten wir

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

(b) Es gilt

$$\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren $u = \cos(x)$. Mit $u' = -\sin(x)$ erhalten wir

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/3)} -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [-\ln(u)]_1^{1/2} = \ln(2)$$

(c) Wir verwenden die partielle Integration mit $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $g(x) = x^2$. Damit erhalten wir

$$\int x^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}\right] - \int x e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Nun verwenden wir erneut die partielle Integration mit $f(x) = e^{2x}$ und $g(x) = x$. Es folgt

$$\left[\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}\right] - \int x e^{2x} = \left[\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}\right] - \left[\frac{1}{2}x e^{2x}\right] + \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(2x^2 - 2x + 1)\right]$$

Hausaufgabe 30

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

(a) Wir machen eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{1}{x^2(x-1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

für $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Durchmultipliziert liefert das die Bedingung

$$1 \stackrel{!}{=} A(x^3 - 2x^2 + x) + B(x^2 - 2x + 1) + C(x^3 - x^2) + Dx^2$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert uns für den Vektor $\in \mathbb{R}^{4\times 1}$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies bringen wir auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit } (4,1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit } (2,2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit } (3,3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir $A = 2,\ B = 1,\ C = -2,$ und $D = 1$. Nun können wir das Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2\ln(x) - \frac{1}{x} - 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_2^4 \\
&= 2\ln(4) - \frac{1}{4} - 2\ln(3) - \frac{1}{3} - 2\ln(2) + \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2(\ln(2) - \ln(3)) + \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

(b) Da der Grad des Zählers nicht kleiner als der Grad des Nenners ist, müssen wir eine Polynomdivision durchführen, bevor wir eine Partialbruchzerlegung machen können. Die Polynomdivision liefert $x^2 = (x^2 - 4) + 4$. Also gilt

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{(x^2-4)+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \;=\; \int 1 + \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \;=\; \int 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Nun können wir mit dem Ansatz

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

die Partialbruchzerlegung mit $A, B \in \mathbb{R}$ durchführen. Durchmultiplizieren liefert

$$4 \stackrel{!}{=} A(x+2) + B(x-2)$$

Wir stellen das Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ auf und formen es in Zeilenstufenform um:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{säubern mit } (2,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \overset{\text{säubern mit } (2,2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir $A = 1$ und $B = -1$. Für das Integral folgt also

$$\int 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = [x + \ln(x-2) - \ln(x+2)]$$

Hausaufgabe 31

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Skizzieren Sie die so berechnete Fläche.

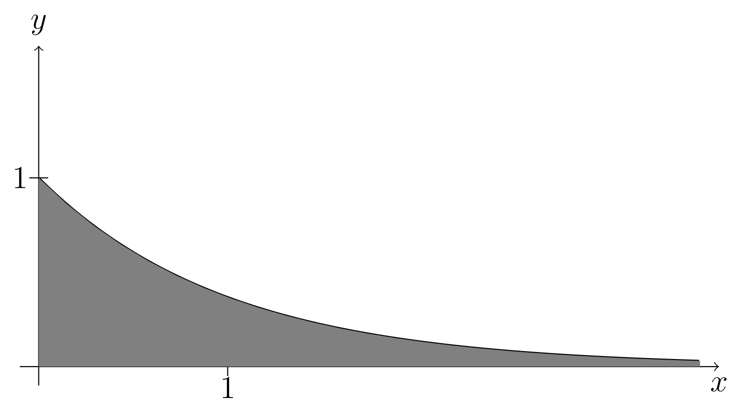
(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{1} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Skizzieren Sie die so berechnete Fläche. Hierfür können Sie einen Taschenrechner verwenden.

Lösung.

(a) Es ist

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty} \int_0^{v} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^v = \underbrace{\lim_{v\to+\infty} -\mathrm{e}^{-v}}_{=0} + 1 = 1$$



Die Fläche ist nach rechts ins Unendliche fortgesetzt zu denken.

(b) Es ist

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0} \int_u^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir integrieren partiell mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g(x) = \ln(x)$. Es folgt

$$\int_u^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}\ln(x)]_u^1 - \int_u^1 2\frac{\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x}]_u^1 = -4 - 2\sqrt{u}\ln(u) + 4\sqrt{u}$$

Bilden wir nun den Grenzwert, so erhalten wir

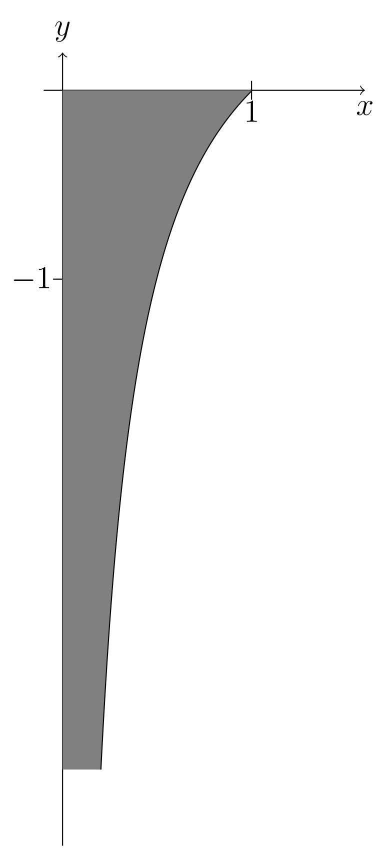
$$\lim_{u\to 0} \int_u^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0} -4 - 2\sqrt{u}\ln(u) + 4\sqrt{u} = \lim_{u\to 0} -2\sqrt{u}\ln(u) - 4$$

In einer Nebenrechnung verwenden wir l'Hôpital, um $\lim_{u\to 0}\sqrt{u}\ln(u)$ zu bestimmen:

$$\lim_{u\to 0}\sqrt{u}\ln(u) \;=\; \lim_{u\to 0}\frac{\ln(u)}{u^{-\frac{1}{2}}} \;\overset{\text{l'H.}}{=}\; \lim_{u\to 0}\frac{u^{-1}}{-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}} \;=\; \lim_{u\to 0} -2\sqrt{u} \;=\; 0$$

Damit folgt ingesamt:

$$\lim_{u\to 0} \int_u^1 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = -4$$



Die Fläche ist nach unten ins Unendliche fortgesetzt zu denken.

Hausaufgabe 32 Es beschreibe $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 50 \cdot 0{,}7^x$ die Nachfrage $f(x)$ nach einem Produkt in Abhängigkeit vom Stückgewinn x.

(a) Gilt $f'(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$?

(b) Berechnen Sie die Elastizität von f und von f'.

(c) Gibt es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$?

(d) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass der Gesamtgewinn $G(x) = f(x) \cdot x$ bei $x = x_0$ maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Gesamtgewinn $G(x_0)$ an.

Lösung.

(a) Es gilt

$$f'(x) = \underbrace{\ln(0{,}7)}_{<0} \cdot \underbrace{50 \cdot 0{,}7^x}_{>0} < 0$$

für alle $x > 0$.

(b) Die Elastizität von f ist

$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = \ln(0{,}7) x$$

Wegen $f''(x) = \ln(0{,}7)^2 \cdot 50 \cdot 0{,}7^x$ ist die Elastizität von f' ebenso

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} x = \ln(0{,}7) x$$

(c) Da $\mathrm{E}_f(x) = \mathrm{E}_{f'}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, gibt es kein x mit $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$.

(d) Da alle Voraussetzungen aus dem Lemma der Vorlesung erfüllt sind, ist der Gesamtgewinn maximal, wenn $\mathrm{E}_f(x_0) = \ln(0{,}7) x_0 = -1$ gilt. Dies ist bei $x_0 = -\frac{1}{\ln(0{,}7)}$ $(\approx 2{,}8037)$ erfüllt.

Der Gesamtgewinn beträgt

$$G(x_0) \;=\; f(x_0) \cdot x_0 \;=\; 50 \cdot 0{,}7^{-1/\ln(0{,}7)} \cdot \left(-\frac{1}{\ln(0{,}7)}\right) \;(\approx 51{,}5707)$$

Folgender Graph zeigt den Gesamtgewinn $G(x)$, aufgetragen über dem Stückgewinn x.