Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 10

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x, y) \mapsto (x - y^2)(x^2 - y)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$. Überprüfen Sie, dass $(1, 1)$ eine Flachstelle von f ist.

(b) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ von f.
Markieren Sie darin mit $+$ die Bereiche, in denen f positive Funktionswerte hat.
Markieren Sie darin mit $-$ die Bereiche, in denen f negative Funktionswerte hat.

(c) Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1, 1)$ eine lokale Extremstelle von f ist.

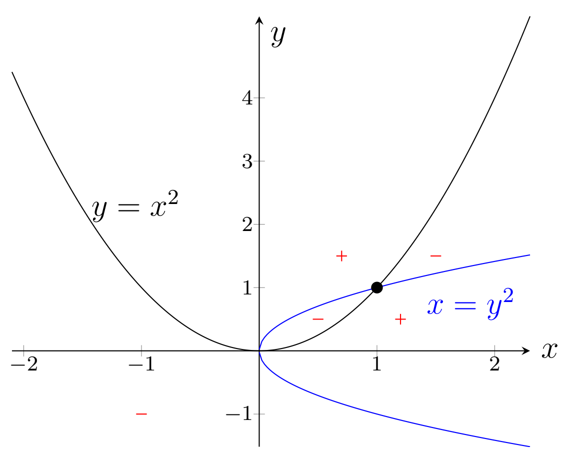
(d) Entscheiden Sie unter Verwendung der Hessematrix, ob $(1, 1)$ eine lokale Extremstelle ist.

Lösung.

(a) Es $\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(x-y^2)+x^2-y \\ -(x-y^2)-2y(x^2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2-2xy^2-y \\ -2x^2y-x+3y^2 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x-2y^2 & -4xy-1 \\ -4xy-1 & -2x^2+6y \end{pmatrix}$.

Da $\nabla_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3-2-1 \\ -2-1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, ist $(1, 1)$ eine Flachstelle von f.

(b) Es ist $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn entweder $(x - y^2) = 0$ oder $(x^2 - y) = 0$ ist. D.h. genau dann, wenn $x = y^2$ oder $y = x^2$ ist. Daher ergibt sich folgende Skizze.



(c) Anhand der Skizze sieht man, dass in einer Umgebung der Nullstelle $(1, 1)$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte liegen. Damit kann $(1, 1)$ weder eine lokale Maximalstelle noch eine lokale Minimalstelle sein. Also ist $(1, 1)$ keine lokale Extremstelle von f.

(d) Wir überprüfen die Hessematrix $\mathrm{H}_f(1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ auf Definitheit.

Da $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,1)) = \det(4) = 4 > 0$ und

$$\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,1)) = \det(\mathrm{H}_f(1,1)) = 4 \cdot 4 - (-5) \cdot (-5) = 16 - 25 = -9 < 0$$

ist, ist $\mathrm{H}_f(1,1)$ weder positiv noch negativ definit. Somit ist $(1,1)$ keine lokale Extremstelle.

Da $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $(1,1)$ eine Sattelstelle vor.

Hausaufgabe 38 Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x + y + z + \dfrac{1}{xyz}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_f(x,y,z)$.

(b) Bestimmen Sie eine Flachstelle von f. Entscheiden Sie, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x^2yz} \\ 1 - \frac{1}{xy^2z} \\ 1 - \frac{1}{xyz^2} \end{pmatrix}$ und $\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3yz} & \frac{1}{x^2y^2z} & \frac{1}{x^2yz^2} \\ \frac{1}{x^2y^2z} & \frac{2}{xy^3z} & \frac{1}{xy^2z^2} \\ \frac{1}{x^2yz^2} & \frac{1}{xy^2z^2} & \frac{2}{xyz^3} \end{pmatrix}$.

(b) Für $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\nabla_f(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{x^2yz} \\ 1 &= \tfrac{1}{xy^2z} \\ 1 &= \tfrac{1}{xyz^2} \end{aligned}$$

ist, d.h. genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= x^2yz \quad &\text{(I)} \\ 1 &= xy^2z \quad &\text{(II)} \\ 1 &= xyz^2 \quad &\text{(III)} \end{aligned} \; .$$

Aus (I) und (II) folgt $x^2yz = xy^2z$ und daher $x = y$.
Aus (II) und (III) folgt $xy^2z = xyz^2$ und daher $y = z$.
Einsetzen in (I) ergibt die Bedingung $1 = x^4$, was in $\mathbb{R}_{>0}$ nur die Lösung $x = 1$ hat.

Somit ist $(1,1,1)$ die einzige Flachstelle von f.

Es ist $\mathrm{H}_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir überprüfen $\mathrm{H}_f(1,1,1)$ auf Definitheit.

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,1,1)) = \det(2) = 2 > 0$.
Es ist

$$\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,1,1)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0 \ .$$

Es ist

$$\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(1,1,1)) = \det\begin{pmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 2\cdot2\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 = 4 > 0 \ .$$

Somit ist $\mathrm{H}_f(1,1,1)$ positiv definit und $(1,1,1)$ daher eine lokale Minimalstelle.

Hausaufgabe 39 Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) & := \ y(z^2+x^2) - 3y^2 \\ g = g_1 & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) & := \ y^2 + \frac{1}{2}(x+z)^2 - 9 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.
Sei $P := (0,3,0) \in \mathbb{R}^3$. Man überprüfe, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(c) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2+x^2-6y \\ 2zy \end{pmatrix}$ und $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ 2y \\ x+z \end{pmatrix}$.
Es ist $\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & -6 & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix}$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&2&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$.

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Mit $\rho \in \mathbb{R}$ soll

$\nabla_f(x,y,z) = \rho \cdot \nabla_g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$ gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcl} 2xy & = & \rho(x+z) \\ z^2+x^2-6y & = & \rho \cdot 2y \\ 2zy & = & \rho(x+z) \\ y^2 + \frac{1}{2}(x+z)^2 - 9 & = & 0 \end{array}$$

Einsetzen des Punktes $P = (0,3,0) \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \rho \cdot 0 \\ -18 & = & \rho \cdot 6 \\ 0 & = & \rho \cdot 0 \\ 0 & = & 0 \ . \end{array}$$

Dies wird durch $\rho = -3$ gelöst.

Da $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur aus einer Spalte besteht, ist das Spaltentupel von $N(P)$ linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \rho = -3$.

(c) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.
Es ist $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eine Basis des Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $N(P)^{\mathrm{t}} u = 0$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Es ist $H = \mathrm{H}_f(P) - \rho \mathrm{H}_g(P) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} =: A \ . \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind $\mathrm{M}_1(A) = 9 > 0$ und

$$\mathrm{M}_2(A) = \det(A) = 9 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 72 > 0 \ .$$

Mithin ist A positiv definit.

Folglich ist $P = (0, 3, 0)$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Hausaufgabe 40 Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcllcl} f & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : & (w,x,y,z) \mapsto f(w,x,y,z) & := & wxyz \\ g_1 & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : & (w,x,y,z) \mapsto g_1(w,x,y,z) & := & w - z \\ g_2 & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : & (w,x,y,z) \mapsto g_2(w,x,y,z) & := & x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 \end{array}$$

Schreibe $g := (g_1, g_2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(w,x,y,z)$, $\nabla_{g_1}(w,x,y,z)$ und $\nabla_{g_2}(w,x,y,z)$.
Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(w,x,y,z)$, $\mathrm{H}_{g_1}(w,x,y,z)$ und $\mathrm{H}_{g_2}(w,x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.
Sei $P := (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Man überprüfe, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(c) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ wyz \\ wxz \\ wxy \end{pmatrix}$, $\nabla_{g_1}(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\nabla_{g_2}(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich

$$\mathrm{H}_f(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & wz & wy \\ xz & wz & 0 & wx \\ xy & wy & wx & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{H}_{g_1}(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{H}_{g_2}(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&4 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Mit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ soll

$$\begin{aligned} \nabla_f(w,x,y,z) &= \rho_1 \cdot \nabla_{g_1}(w,x,y,z) + \rho_2 \cdot \nabla_{g_2}(w,x,y,z)\ , \\ g_1(w,x,y,z) &= 0 \text{ und} \\ g_2(w,x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} xyz &= \rho_1 \cdot 1 + \rho_2 \cdot 0 = \rho_1 \\ wyz &= \rho_1 \cdot 0 + \rho_2 \cdot 2x = 2\rho_2 x \\ wxz &= \rho_1 \cdot 0 + \rho_2 \cdot 2y = 2\rho_2 y \\ wxy &= \rho_1 \cdot (-1) + \rho_2 \cdot 4z = -\rho_1 + 4\rho_2 z \\ w - z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen des Punktes $P = (1,1,1,1)$ liefert

$$\begin{aligned} 1 &= \rho_1 \\ 1 &= 2\rho_2 \\ 1 &= 2\rho_2 \\ 1 &= -\rho_1 + 4\rho_2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dies wird durch $\rho_1 = 1$ und $\rho_2 = \frac{1}{2}$ gelöst.

Es ist $N(P) = (\nabla_{g_1}(P), \nabla_{g_2}(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und das Spaltentupel $(\nabla_{g_1}(P), \nabla_{g_2}(P))$ ist linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Wir lösen das homogene lineare Gleichungssystem $N(P)^{\mathrm{t}}u = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Eine Basis des Lösungsraums ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$H := \mathrm{H}_f(P) - \rho_1 \mathrm{H}_{g_1}(P) - \rho_2 \mathrm{H}_{g_2}(P) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&-1&1&1 \\ 1&1&-1&1 \\ 1&1&1&-2 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} 0&-1&1&0 \\ 1&-2&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&-1&1&1 \\ 1&1&-1&1 \\ 1&1&1&-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1 \\ -1&-2 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0&-1&1&0 \\ 1&-2&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&-1 \\ 2&4 \\ -2&0 \\ 0&-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4&-4 \\ -4&-12 \end{pmatrix} =: A . \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind

$$\mathrm{M}_1(A) = -4 < 0 \text{ und } \mathrm{M}_2(A) = \det(A) = -4 \cdot (-12) - (-4) \cdot (-4) = 32 > 0 .$$

Mithin ist A negativ definit.

Folglich ist $P = (1,1,1,1)$ ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.