Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 11

Hausaufgabe 41 Berechnen Sie.

(a) $\dfrac{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$

(b) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}) - \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{3-2\mathrm{i}}\right)$

(c) $\dfrac{|2+\mathrm{i}|^2}{4-\mathrm{i}}$

(d) $\sin(2\mathrm{i})$

Lösung.

(a) Es gilt

$$\frac{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{(11-10\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = \frac{12-31\mathrm{i}}{5} \; .$$

(b) Es gilt

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}) - \mathrm{Im}\left(\frac{1}{3-2\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{3-2\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{13}\right) = -\frac{2}{13} \; .$$

(c) Es gilt

$$\frac{|2+\mathrm{i}|^2}{4-\mathrm{i}} = \frac{5}{4-\mathrm{i}} = \frac{5\cdot(4+\mathrm{i})}{(4-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})} = \frac{20+5\mathrm{i}}{17} \; .$$

(d) Es gilt

$$\sin(2\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{2}) = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}\mathrm{i} \; .$$

Hausaufgabe 42 Zeichnen Sie in die komplexe Ebene.

(a) $\mathrm{e}^{1+\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$

(b) i^{371}

(c) $\{\, x \in \mathbb{C} \,:\, x^2 + 2x + 2 = 0 \,\}$

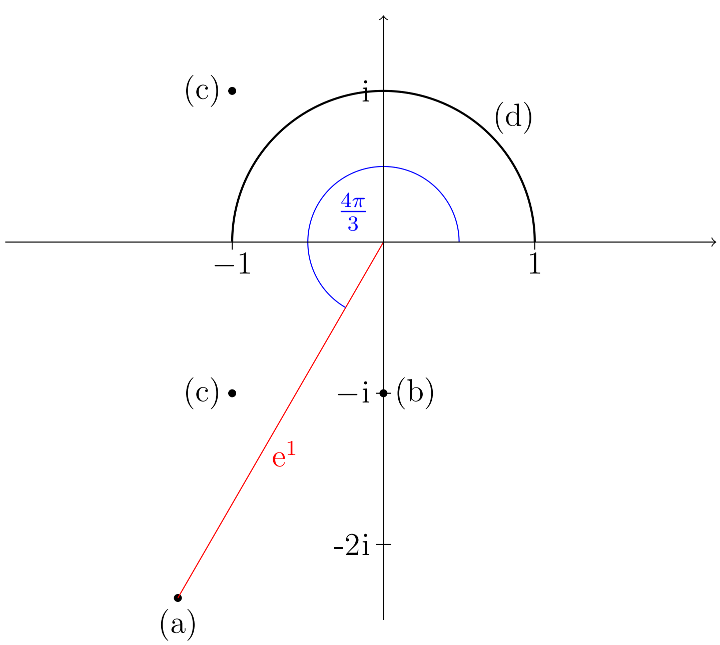
(d) $\{\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} \,:\, t \in [0, \pi/2] \,\}$

Lösung.

(a) Es ist $\mathrm{e}^{1+\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$ die komplexe Zahl mit Abstand e von 0 und Winkel $\frac{4\pi}{3}$ zur positiven reellen Achse.
(b) Da $\mathrm{i}^4 = 1$ gilt, folgt auch $\mathrm{i}^{368} = 1$. Damit ist $\mathrm{i}^{371} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$.
(c) Es gilt

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1) = \pm\mathrm{i} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1 \pm \mathrm{i} \end{aligned}$$

(d) Die Argumentation aus (a) kann auch hier angewandt werden. Wir folgern, dass alle Zahlen der Menge $\{\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} \,:\, t \in [0, \pi/2] \,\}$ den Abstand $\mathrm{e}^0 = 1$ von 0 haben. Die Winkel der Zahlen reichen von 0 für $t = 0$ bis π für $t = \pi/2$. Damit beschreibt die Menge also den unten eingetragenen Halbkreis.



Hausaufgabe 43

(a) Bestimmen Sie a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x)^4 = a + b\cos(2x) + c\cos(4x)$ unter Verwendung der Formel von Euler.

(b) Berechnen Sie $\int_0^{\pi/4} \cos(x)^4 \, \mathrm{d}x$ unter Verwendung von (a).

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $x \mapsto \cos(x)^4$ bei $x = 0$, $x = \pi/4$ und $x = \pi/2$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von $\cos(x)^4$ für $x \in [0, \pi/2]$ unter Berücksichtigung von (c).

Lösung.

(a) Mit der Formel von Euler und dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned}\cos(x)^4 &= \left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^4 \\ &= \tfrac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right) \\ &= \tfrac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 4 \cdot 2\cos(2x) + 6\right) \\ &= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{8}\cos(4x)\ .\end{aligned}$$

Also ist $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{1}{8}$.

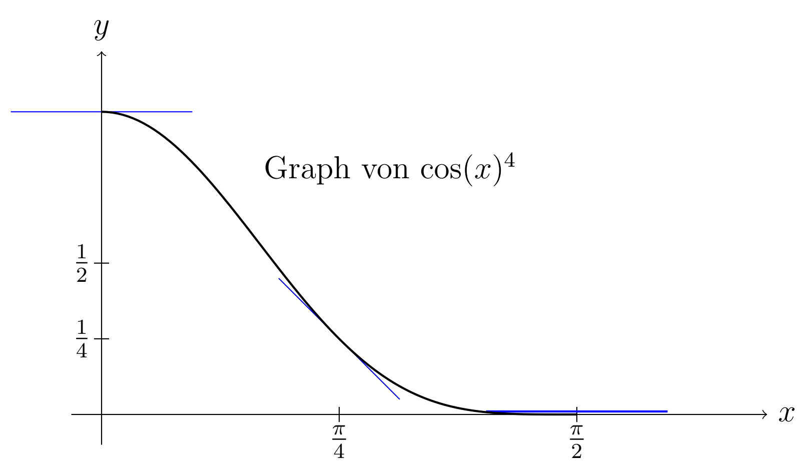
(b) Mit Hilfe von (a) ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos(x)^4 \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{3}{32}\pi + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(c) Die Ableitung lautet $(\cos(x)^4)' = -4\cos(x)^3\sin(x)$. Setzen wir die angegebenen Punkte ein, so erhalten wir

$$-4\cos(0)^3\sin(0) = 0, \qquad -4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1, \qquad -4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(d) In der untenstehenden Skizze sind die blauen Geradenstücke die Tangenten zu den in (c) berechneten Ableitungen.



Hausaufgabe 44 Entscheiden Sie bei den folgenden Folgen und Reihen, ob sie konvergieren oder nicht. Ermitteln Sie bei Konvergenz den Grenzwert.

(a) $\left(\frac{1}{n} + \mathrm{i}\frac{n+2}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{\mathrm{i}^n}{2^n}$

(c) $(\mathrm{i}^{-n})_{n\geqslant 1}$

(d) $\left(|\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}-n}|\right)_{n\geqslant 1}$

Lösung.
(a) Es gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{i}\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{i}\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \longrightarrow 1$. Damit konvergiert die Folge gegen den Grenzwert $0 + 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$.

(b) Es gilt $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Also wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{\mathrm{i}^n}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right)^n = -1 + \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = -1 + \mathrm{i}$$

Insbesondere konvergiert die Reihe.

(c) Die Folgenglieder von $(\mathrm{i}^{-n})_{n\geqslant 1}$ sind

$$(-\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1, \dots)\,.$$

Davon bilden die Realteile die Folge

$$(0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)\,.$$

Diese Folge divergiert. Also divergiert auch $(\mathrm{i}^{-n})_{n\geqslant 1}$.

Man hätte auch mit der Folge der Imaginärteile argumentieren können, die ebenfalls divergiert.

(d) Es gilt

$$|\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}-n}| \;=\; |\mathrm{e}^{-n} \cdot \mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}}| \;=\; |\mathrm{e}^{-n}| \cdot |\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}}| \;=\; \mathrm{e}^{-n} \cdot 1 \;\to\; 0\,.$$

Also konvergiert die Folge gegen den Grenzwert 0.