Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 12

Hausaufgabe 45

(a) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{5x^2-6x+13}{(x+1)(x^2-2x+5)}$ durch.

(b) Bestimmen Sie

$$\int \frac{5x^2-6x+13}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Lösung. Mit dritter binomischer Formel wird

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 = (x-1-2\mathrm{i})(x-1+2\mathrm{i})\ .$$

Für die Partialbruchzerlegnung machen wir den Ansatz

$$\frac{5x^2-6x+13}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{5x^2-6x+13}{(x+1)(x-1-2\mathrm{i})(x-1+2\mathrm{i})} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1-2\mathrm{i}}+\frac{C}{x-1+2\mathrm{i}}$$

mit $A,\ B,\ C\ \in \mathbb{C}$.
Durchmultiplizieren mit dem Nenner gibt

$$5x^2-6x+13 = A(x^2-2x+5)+B(x^2+2\mathrm{i}x-1+2\mathrm{i})+C(x^2-2\mathrm{i}x-1-2\mathrm{i})\ .$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes lineare Gleichungssystem, welches wir in Zeilenstufenform bringen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1+2\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & 13 \\ -2 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(3,1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -6+2\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i} & -12 \\ 0 & 2+2\mathrm{i} & 2-2\mathrm{i} & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(3,2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+\mathrm{i} & 4+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -8-8\mathrm{i} & -8-8\mathrm{i} \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(3,3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also folgt $A=3$, $B=1$ und $C=1$. Somit wird

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2-6x+13}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-(1+2\mathrm{i})}+\frac{1}{x-(1-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[3\ln(x+1)+\ln((x-1)^2+2^2)\right] \\ &= \left[3\ln(x+1)+\ln(x^2-2x+5)\right]\ . \end{aligned}$$

Hausaufgabe 46 Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$ auf $(-1, +1)$ mit

$$y' \;=\; \frac{y}{1-x^2} \qquad \text{und} \qquad y(0) \;=\; 3\;.$$

Lösung.

Für unsere homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist die Lösung gegeben durch

$$y_0\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad \text{mit} \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für $x \in (-1, +1)$ berechnen wir also

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\;.$$

Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz $\frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$ führt auf

$$-1 \;=\; A(t+1) + B(t-1)\;,$$

woraus durch Koeffizientenvergeich $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ hervorgeht. Also ist

$$\frac{1}{1-t^2} \;=\; -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(1+t)}\;.$$

Um für $x \in (-1, +1)$ das Integral $\int_0^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$ zu berechnen, beobachten wir, daß nach Kettenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t) = \frac{1}{1-t}\cdot(-1) = \frac{1}{t-1}$ ist. Dabei ist $1-t$ positiv für t zwischen 0 und x und somit dort $\ln(1-t)$ definiert.
Wir können also mit der Rechnung wie folgt fortfahren.

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dies führt auf die Lösung

$$y(x) \;=\; y_0\mathrm{e}^{A(x)} \;=\; 3\exp\big(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\big) \;=\; 3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\;.$$

Hausaufgabe 47 Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit

$$y'\sqrt{x} - 2y + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad y(1) \;=\; 2\,.$$

Lösung.

Für unsere inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist die Lösung gegeben durch

$$\mathrm{e}^{A(x)}\left(F(x) + y_0\right) \qquad \text{mit} \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen also

$$A(x) = \int_1^x \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \Big[4\sqrt{t}\Big]_1^x = 4(\sqrt{x} - 1)$$

und

$$\begin{aligned} F(x) \;&=\; \int_1^x -\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-4\left(\sqrt{t}-1\right)}\,\mathrm{d}t \quad \overset{u=\sqrt{t}-1}{=} \quad \int_1^x -2u'(t)\,\mathrm{e}^{-4u(t)}\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_{u(1)}^{u(x)} -2\mathrm{e}^{-4u}\,\mathrm{d}u \quad = \quad \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4u}\right]_0^{\sqrt{x}-1} \quad = \quad \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(F(x) + y_0\right) = \mathrm{e}^{4\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{4\left(\sqrt{x}-1\right)}.$$

Hausaufgabe 48

(a) Bestimmen Sie $\int \mathrm{e}^{2x} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^4+x^2}$ durch.

(c) Bestimmen Sie

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Lösung.

(a) Wir können die Eulersche Formel oder partielle Integration anwenden.

Lösung mit der Eulerschen Formel. Es wird

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}+\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}+\frac{1}{2-3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2-3\mathrm{i}}{13}\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}+\frac{2+3\mathrm{i}}{13}\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{2-3\mathrm{i}}{13}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\frac{2+3\mathrm{i}}{13}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\right] \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\left(\frac{2-3\mathrm{i}}{13}(\cos(3x)+\mathrm{i}\sin(3x))+\frac{2+3\mathrm{i}}{13}(\cos(3x)-\mathrm{i}\sin(3x))\right)\right] \\
&= \left[\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos(3x)+\frac{3}{13}\sin(3x)\right)\right]\ .
\end{aligned}$$

Alternative Lösung mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\right]+\frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\right]+\left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right]-\frac{9}{4}\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\qquad (1+\frac{9}{4})\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right] \\
\Leftrightarrow\qquad \int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos(3x)+\frac{3}{13}\sin(3x)\right)\right]
\end{aligned}$$

(b) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} \;=\; \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-\mathrm{i}}+\frac{D}{x+\mathrm{i}}$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner führt auf

$$1 \;=\; A(x^3+x)+B(x^2+1)+C(x^3+\mathrm{i}x^2)+D(x^3-\mathrm{i}x^2)\;.$$

Koeffizientenvergleich führt auf das folgende lineare Gleichungssystem, welches wir auf Zeilenstufenform bringen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0\\ 1&0&1&1&0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(2,1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&1&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0\\ 0&0&1&1&0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(2,2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-1\\ 0&0&1&1&0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(4,3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&-2\mathrm{i}&-1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{säubern mit }(4,4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&\frac{\mathrm{i}}{2}\\ 0&0&0&1&-\frac{\mathrm{i}}{2} \end{array}\right)$$

Damit folgt $A=0$, $B=1$, $C=\frac{\mathrm{i}}{2}$ und $D=-\frac{\mathrm{i}}{2}$. Es wird

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} \;=\; \frac{1}{x^2}+\frac{\mathrm{i}}{2(x-\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{i}}{2(x+\mathrm{i})}$$

(c) Es wird

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}+\frac{\mathrm{i}}{2(x-\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{i}}{2(x+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x\\
&=\; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{x-(0+1\cdot\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{i}}{x-(0-1\cdot\mathrm{i})}\right)\mathrm{d}x\\
&=\; \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(-2\arctan\left(\frac{x-0}{1}\right)\right)\right]_1^{\sqrt{3}}\\
&=\; \left[-\frac{1}{x}-\arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}}\\
&=\; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\sqrt{3}+\arctan(1)\\
&=\; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\\
&=\; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}\;.
\end{aligned}$$