Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 13

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 49 Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y' \;=\; \frac{2x}{1+x^2}\, y + x^3$$

und mit $y(0) = 4$.

Lösung. Diese Differentialgleichung ist linear, denn sie ist der Form $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ mit $a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ und $b(x) = x^3$. Als Anfangswertbedingung sei mit $x_0 = 0$ noch $y_0 = y(0) = 4$ erfüllt.

Um die Gleichung zu lösen, setzen wir also

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t^2)]_0^x = \ln(1+x^2) - \ln(1) = \ln(1+x^2)$$

und

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^3\mathrm{e}^{-\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^3 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Wir substituiren $u = 1 + t^2$. Mit $u' = 2t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{1+x^2} \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u &&= \frac{1}{2}\int_1^{1+x^2} 1 - \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}[u - \ln(u)]_1^{1+x^2} &&= \frac{1}{2}(1 + x^2 - \ln(1+x^2) - 1 + \ln(1)) &&= \frac{1}{2}(x^2 - \ln(1+x^2))\ . \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) = \mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}(\frac{1}{2}(x^2 - \ln(1+x^2)) + 4) = \frac{1}{2}(1+x^2)(x^2 - \ln(1+x^2) + 8)$$

die gesuchte Funktion.

Hausaufgabe 50

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 4y' + 7y = 0$$

und $y(0) = 2$ und $y'(0) = 6$.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 4y' + 7y = 2\mathrm{e}^{7x} \ .$$

Lösung.

(a) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by \ = \ 0$$

mit $a = -2$ und $b = 7$. Es ist also $4 = a^2 < b = 7$.

Mit $w := \sqrt{b - a^2} = \sqrt{3}$ und $r, s \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Form

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) = \mathrm{e}^{2x}(r\sin(\sqrt{3}x) + s\cos(\sqrt{3}x))$$

Nun sind r und s so zu bestimmen, dass die Anfangswertbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 6$ erfüllt sind.

Es ist $y'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(r\sin(\sqrt{3}x) + s\cos(\sqrt{3}x)) + \mathrm{e}^{2x}(r\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) - s\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x))$.

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} 2 & \stackrel{!}{=} & \mathrm{e}^{2\cdot 0}(r\sin(\sqrt{3}\cdot 0) + s\cos(\sqrt{3}\cdot 0)) & = & s \\ 6 & \stackrel{!}{=} & 2\mathrm{e}^{2\cdot 0}(r\sin(\sqrt{3}\cdot 0) + s\cos(\sqrt{3}\cdot 0)) + \mathrm{e}^{2\cdot 0}(r\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\cdot 0) - s\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\cdot 0)) & = & 2s + \sqrt{3}r \ . \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich $s = 2$ und $r = \frac{6-2s}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Somit folgt

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x}(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}x) + 2\cos(\sqrt{3}x)) \ .$$

(b) Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by \ = \ c(x)$$

mit $a = -2$, $b = 7$ und $c(x) = 2\mathrm{e}^{7x}$.

In (a) haben wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' - 4y' + 7y = 0$ als

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) = \mathrm{e}^{2x}(r\sin(\sqrt{3}x) + s\cos(\sqrt{3}x))$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Um alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, genügt es, eine Lösung $\hat{y}(x)$ zu finden und dann die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu addieren.

Es ist $c(x) = 2\mathrm{e}^{7x}$ von der Form $\mu\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\mu = 2$ und $\lambda = 7$.

Da $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 49 - 28 + 7 = 28 \neq 0$ ist, machen wir den Ansatz

$$\hat{y}(x) = \nu\mathrm{e}^{\lambda x} = \nu\mathrm{e}^{7x}$$

mit $\nu \in \mathbb{C}$.

Wir bestimmen ν, indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 7y = 2\mathrm{e}^{7x}$ einsetzen.

Es ist $\hat{y}'(x) = 7\nu\mathrm{e}^{7x}$ und $\hat{y}''(x) = 49\nu\mathrm{e}^{7x}$.

Es ist

$$2\mathrm{e}^{7x} \overset{!}{=} \hat{y}'' - 4\hat{y}' + 7\hat{y} = 49\nu\mathrm{e}^{7x} - 4 \cdot 7\nu\mathrm{e}^{7x} + 7 \cdot \nu\mathrm{e}^{7x} = 28\nu\mathrm{e}^{7x}$$

genau dann, wenn $2 = 28\nu$ ist, d.h. genau dann, wenn $\nu = \frac{1}{14}$ ist.

Somit sind alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y'' - 4y' + 7y = 2\mathrm{e}^{7x}$ von der Form

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}(r\sin(\sqrt{3}x) + s\cos(\sqrt{3}x)) + \frac{1}{14}\mathrm{e}^{7x}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Da nur eine Lösung gefragt war, genügt es, als Antwort z.B. $y(x) = \frac{1}{14}\mathrm{e}^{7x}$ anzugeben.

Hausaufgabe 51 Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 25y = 3\sin(2x)\ .$$

Lösung. Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by = c(x)$$

mit $a = 0$, $b = -25$ und $c(x) = 3\sin(2x)$.

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' - 25u = 0$.

Es ist $0 = a^2 > b = -25$. Somit ist mit $v = \sqrt{a^2 - b} = 5$ und $r, s \in \mathbb{R}$ jede Lösung von der Form

$$u(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\mathrm{e}^{vx} + s\mathrm{e}^{-vx}) = r\mathrm{e}^{5x} + s\mathrm{e}^{-5x}\ .$$

Um alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, genügt es, eine Lösung $\hat{y}(x)$ zu finden und dann die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu addieren.

Es ist

$$c(x) = 3\sin(2x) = \frac{3}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) = -\frac{3\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}).$$

Setze $c_1(x) := -\frac{3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ und $c_2(x) := \frac{3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$. Dann ist $c(x) = c_1(x) + c_2(x)$.

Wir bestimmen zunächst $\hat{y}_1$ mit $\hat{y}_1'' - 25\hat{y}_1 = c_1(x)$.

Es ist $c_1(x)$ von der Form $\mu_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ mit $\mu_1 = -\frac{3\mathrm{i}}{2}$ und $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$.

Da $\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 + b = -4 - 25 = -29 \neq 0$ ist, machen wir den Ansatz

$$\hat{y}_1(x) = \nu_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

mit $\nu_1 \in \mathbb{C}$.

Wir bestimmen ν_1, indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $\hat{y}_1'' - 25\hat{y}_1 = c_1(x)$ einsetzen.

Es ist $\hat{y}_1'(x) = 2\mathrm{i}\nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ und $\hat{y}_1''(x) = -4\nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

Es ist

$$-\frac{3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \stackrel{!}{=} \hat{y}_1'' - 25\hat{y}_1 = -4\nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 25\nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = -29\nu_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

genau dann, wenn $\frac{3\mathrm{i}}{2} = 29\nu_1$ ist, d.h. wenn $\nu_1 = \frac{3\mathrm{i}}{58}$ ist. Somit ist $\hat{y}_1(x) = \frac{3\mathrm{i}}{58}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

Wir bestimmen nun $\hat{y}_2$ mit $\hat{y}_2'' - 25\hat{y}_2 = c_2(x)$.

Es ist $c_2(x)$ von der Form $\mu_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ mit $\mu_2 = \frac{3\mathrm{i}}{2}$ und $\lambda_1 = -2\mathrm{i}$.

Da $\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 + b = -4 - 25 = -29 \neq 0$ ist, machen wir den Ansatz

$$\hat{y}_2(x) = \nu_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$$

mit $\nu_2 \in \mathbb{C}$.

Wir bestimmen ν_2, indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $\hat{y}_2'' - 25\hat{y}_2 = c_2(x)$ einsetzen.

Es ist $\hat{y}_2'(x) = -2\mathrm{i}\nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ und $\hat{y}_2''(x) = -4\nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$.

Es ist

$$\frac{3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \stackrel{!}{=} \hat{y}_2'' - 25\hat{y}_2 = -4\nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 25\nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} = -29\nu_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$$

genau dann, wenn $\frac{3\mathrm{i}}{2} = -29\nu_2$ ist, d.h. wenn $\nu_2 = -\frac{3\mathrm{i}}{58}$ ist. Somit ist $\hat{y}_2(x) = -\frac{3\mathrm{i}}{58}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$.

Wir können nun die Lösung $\hat{y}(x) := \hat{y}_1(x) + \hat{y}_2(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + 2ay' + by \;=\; c(x) \;=\; c_1(x) + c_2(x)$$

verwenden.

Somit sind alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y'' - 25y = 3\sin(2x)$ von der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) + \hat{y}(x) \\ &= u(x) + \hat{y}_1(x) + \hat{y}_2(x) \\ &= r\mathrm{e}^{5x} + s\mathrm{e}^{-5x} + \tfrac{3\mathrm{i}}{58}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \tfrac{3\mathrm{i}}{58}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &= r\mathrm{e}^{5x} + s\mathrm{e}^{-5x} - \tfrac{3}{29}\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\ &= r\mathrm{e}^{5x} + s\mathrm{e}^{-5x} - \tfrac{3}{29}\sin(2x) \end{aligned}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 52 Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' + 6y' + 9y = x + 1$$

und $y(\ln(3)) = \frac{2}{9}\ln(3)$ und $y'(\ln(3)) = -\frac{1}{3}\ln(3)$.

Lösung. Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by = c(x)$$

mit $a = 3$, $b = 9$ und $c(x) = x + 1$.

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' + 6u' + 9u = 0$.

Es ist $a^2 = 9 = b$. Somit ist mit $r, s \in \mathbb{R}$ jede Lösung von der Form

$$u(x) = \mathrm{e}^{-3x}(r + sx)\ .$$

Um alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, genügt es, eine Lösung $\hat{y}(x)$ zu finden und dann die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu addieren.

Es ist $c(x) = x + 1$ ein Polynom von Grad 1. Daher machen wir den Ansatz

$$\hat{y}(x) = c_1 x + c_0$$

mit $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen c_1 und c_0 , indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $\hat{y}'' + 6\hat{y}' + 9\hat{y} = x + 1$ einsetzen.

Es ist $\hat{y}' = c_1$ und $\hat{y}'' = 0$.

Nun soll $x + 1 \stackrel{!}{=} \hat{y}'' + 6\hat{y}' + 9\hat{y} = 6c_1 + 9(c_1 x + c_0)$ sein.

Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen $1 = 9c_1$ und $1 = 6c_1 + 9c_0$.

Nun folgt $c_1 = \frac{1}{9}$ und $c_0 = \frac{1-6c_1}{9} = \frac{1}{27}$.

Das heißt, jede Lösung von $y'' + 6y' + 9y = x + 1$ ist von der Form

$$y(x) = u(x) + \hat{y}(x) = \mathrm{e}^{-3x}(r + sx) + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Nun sind r und s so zu bestimmen, dass die Anfangswertbedingungen $y(\ln(3)) = \frac{2}{9}\ln(3)$ und $y'(\ln(3)) = -\frac{1}{3}\ln(3)$ erfüllt sind.

Es ist $y'(x) = \mathrm{e}^{-3x}(-3r - 3sx + s) + \frac{1}{9}$.
Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{9}\ln(3) &\stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-3\ln(3)}(r + s\ln(3)) + \tfrac{1}{9}\ln(3) + \tfrac{1}{27} = \tfrac{1}{27}(r + s\ln(3)) + \tfrac{1}{9}\ln(3) + \tfrac{1}{27} && \text{(I)} \\ -\tfrac{1}{3}\ln(3) &\stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-3\ln(3)}(-3r - 3s\ln(3) + s) + \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{27}(-3r - 3s\ln(3) + s) + \tfrac{1}{9} && \text{(II)} \end{aligned}$$

Multiplizieren von Gleichung (I) mit 27 liefert $6\ln(3) \stackrel{!}{=} r + s\ln(3) + 3\ln(3) + 1$ und daher

$$r \stackrel{!}{=} 3\ln(3) - s\ln(3) - 1 \qquad \text{(I}'\text{)}$$

Multiplizieren von Gleichung (II) mit 27 liefert

$$-9\ln(3) \stackrel{!}{=} (-3r - 3s\ln(3) + s) + 3 \qquad \text{(II}'\text{)}.$$

Einsetzen von (I′) in (II′) liefert

$$-9\ln(3) \stackrel{!}{=} (-3(3\ln(3) - s\ln(3) - 1) - 3s\ln(3) + s) + 3 = -9\ln(3) + 6 + s$$

und daher $s = -6$.
Aus (I′) ergibt sich $r = 3\ln(3) + 6\ln(3) - 1 = 9\ln(3) - 1$.
Somit ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{-3x}(9\ln(3) - 1 - 6x) + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}$$

die gesuchte Funktion.