Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung 14

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 53

(a) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+1} = 2x_n + (-3)^n$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form.

(b) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+1} = 2x_n + 3 \cdot 2^n$ und $x_0 = 5$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form.

Lösung.

(a) Dies ist eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = ax_n + b \cdot c^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $a = 2$, $b = 1$ und $c = -3$ und Anfangswert $x_0 = 1$. Da $a \neq c$ ist, ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{b}{c-a}c^n + ra^n\right)_{n\geqslant 0} = \left(-\frac{1}{5} \cdot (-3)^n + r \cdot 2^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit

$$r = x_0 - \frac{b}{c-a} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

Also ist $(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(-\frac{(-3)^n}{5} + \frac{6\cdot 2^n}{5}\right)_{n\geqslant 0}$.

(b) Dies ist eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = ax_n + b \cdot c^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $a = 2$, $b = 3$ und $c = 2$ und Anfangswert $x_0 = 5$. Da $a = c$ ist, ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left((bn + ra)a^{n-1}\right)_{n\geqslant 0} = \left((3n + 2r) \cdot 2^{n-1}\right)_{n\geqslant 0}$$

mit

$$r = x_0 = 5.$$

Also ist $(x_n)_{n\geqslant 0} = ((3n + 10) \cdot 2^{n-1})_{n\geqslant 0}$.

Hausaufgabe 54

(a) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n + 1$ und $x_0 = 1$, $x_1 = 1$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form.

(b) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + (-1)^n$ und $x_0 = 0$, $x_1 = 0$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form.

(c) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n + 3\cdot 2^n$ und $x_0 = 1$, $x_1 = 1$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form.

Lösung.

(a) Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung der Form

$$x_{n+2} = 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

mit $a = 3$, $b = -5$, $c = d = 1$. Es ist

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2 + b} = 3 + 2 = 5$$

und

$$\lambda_2 = a - \sqrt{a^2 + b} = 3 - 2 = 1.$$

Es ist $a^2 + b = 4 \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b = 0$. Somit ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{c}{2(d-a)} nd^{n-1} + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n\right)_{n\geqslant 0} = \left(-\frac{1}{4}n + r\cdot 5^n + s\right)_{n\geqslant 0}$$

mit $r, s \in \mathbb{C}$.

Die Anfangswertbedingungen ergeben

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = -\tfrac{1}{4}\cdot 0 + r\cdot 5^0 + s = r + s \\ 1 &= x_1 = -\tfrac{1}{4}\cdot 1 + r\cdot 5^1 + s = -\tfrac{1}{4} + 5r + s\ . \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $s = 1 - r$. Damit wird die zweite Gleichung zu

$$1 = -\frac{1}{4} + 5r + 1 - r = \frac{3}{4} + 4r\ .$$

Aus dieser folgt nun $r = \frac{1}{16}$ und daher $s = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Insgesamt ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(-\frac{n}{4} + \frac{5^n}{16} + \frac{15}{16}\right)_{n\geqslant 0}\ .$$

(b) Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung der Form

$$x_{n+2} = 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

mit $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$ und $d = -1$.

Es ist $a^2 + b = 0$ und $d \neq a$. Somit ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{c}{(d-a)^2}d^n + ra^n + sna^n\right)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{1}{9}\cdot(-1)^n + r\cdot 2^n + sn\cdot 2^n\right)_{n\geqslant 0}$$

mit $r, s \in \mathbb{C}$.

Die Anfangswertbedingungen ergeben

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& x_0 = \frac{1}{9}\cdot(-1)^0 + r\cdot 2^0 + s\cdot 0\cdot 2^n = \frac{1}{9} + r \\ 0 &=& x_1 = \frac{1}{9}\cdot(-1)^1 + r\cdot 2^1 + s\cdot 2^1 = -\frac{1}{9} + 2r + 2s\ . \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $r = -\frac{1}{9}$. Damit wird die zweite Gleichung zu

$$0 = -\frac{1}{3} + 2s\ .$$

Aus dieser folgt nun $s = \frac{1}{6}$.

Insgesamt ist

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{(-1)^n}{9} - \frac{2^n}{9} + \frac{n\cdot 2^n}{6}\right)_{n\geqslant 0}\ .$$

(c) Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung der Form

$$x_{n+2} = 2ax_{n+1} + bx_n + cd^n$$

mit $a = 3$, $b = -5$, $c = 3$ und $d = 2$. Es ist

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2+b} = 3 + 2 = 5$$

und

$$\lambda_2 = a - \sqrt{a^2+b} = 3 - 2 = 1.$$

Es ist $a^2 + b = 4 \neq 0$ und $d^2 - 2ad - b = -3$. Somit ist jede Lösung von der Form

$$(x_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{c}{d^2 - 2ad - b}d^n + r\lambda_1^n + s\lambda_2^n\right)_{n\geqslant 0} = (-2^n + r\cdot 5^n + s)_{n\geqslant 0}$$

mit $r, s \in \mathbb{C}$.

Die Anfangswertbedingungen ergeben

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = -2^0 + r \cdot 5^0 + s = -1 + r + s \\ 1 &= x_1 = -2^1 + r \cdot 5^1 + s = -2 + 5r + s \ . \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung folgt $s = 2 - r$ und damit wird die 2. Gleichung zu

$$1 = 4r \ .$$

Aus dieser folgt nun $r = \frac{1}{4}$ und daher $s = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.
Insgesamt ist

$$(x_n)_{n \geqslant 0} = \left(-2^n + \frac{5^n}{4} + \frac{7}{4} \right)_{n \geqslant 0} \ .$$