Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Wirtschaftsinformatik (Prüfungsnummer 1000510000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–7** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 8–13** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **25.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **09.05.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right)$

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\ .$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \ln(x^x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\ (x,y)\mapsto f(x,y):=-5x^2+2x+4xy-y^2-5$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y)$ und $\mathrm{H}_f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Flachstelle P von f.

(c) Ist P eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f?

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f\ &:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\ (x,y,z)\mapsto f(x,y,z) &&:= \tfrac{1}{4}(y^4-x^4)-x^2y-yz \\ g=g_1\ &:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\ (x,y,z)\mapsto g(x,y,z) &&:= \pi(z^2-1)-2\sin(\pi xy) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g=0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P:=(1,-1,-1)\in\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g=0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g=0$?

Bitte wenden →

Aufgabe 5 (4+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{2x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\mathrm{i}} + \frac{C}{x-\mathrm{i}}$$

für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(b) Berechnen Sie auf $\mathbb{R}_{>0}$ das Integral

$$\int \frac{2x+2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \ .$$

Aufgabe 6 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Sei ein Sparvertrag geplant mit Startkapital $K_0 = 500€$. Es soll nachschüssig jährlich eine Rate von $R = 30€$ eingezahlt werden. Der Zinssatz betrage $p = 1\%$.

(1) Berechnen Sie das Guthaben nach einem Jahr.

(2) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 4000€ erreicht ist?

(b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 25% angelegt werden, also zu einem Zinsfaktor von $q = \frac{5}{4}$.

Jeweils zum Jahresende soll eine Auszahlung von 100€ getätigt werden.

Wie hoch muss K_0 sein, damit nach 2 Jahren das Kapital aufgebraucht ist, also $K_2 = 0$ ist?

Aufgabe 7 (3+4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y' \ = \ \cos(x) \cdot y \qquad \text{und} \qquad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ = \ 1 \ .$$

(b) Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 2y' + y = x + 3 \ .$$

Aufgabe 8 (2+1+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{1}{(2+\mathrm{i})^2} = a + b\mathrm{i}$: $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$

(b) Berechnen Sie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\pi\mathrm{i})^n}{n!} = \boxed{}$

(c) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definiert durch $x_{n+1} = 2x_n + 1$ und $x_0 = 0$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form: $x_n = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (2+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^3$. Sei $x_0 := 1$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$$T_2(x) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ an, für welches $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}$. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

$$R_2(x) = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} =$$

Aufgabe 12 (1+1+1+1 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Parameter. Seien $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Berechnen Sie den Cosinus des von b_s und c eingeschlossenen Winkels φ.

$$\cos(\varphi) =$$

(b) Berechnen Sie:

$$b_s \times c =$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von b_s und c aufgespannten Parallelogramms in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

(d) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass das Volumen des von a, b_s und c aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

$$s =$$

Aufgabe 13 (2 Punkte)

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $8\sin(x)^2\cos(x) = a\cos(x) + b\cos(3x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

$a =$ $b =$