Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Wirtschaftsinformatik (Prüfungsnummer 1000510000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–7** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 8–13** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **25.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **09.05.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right)$

Lösung.

(a) Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-1}{2x} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

Alternative Lösung: Es ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2.$

(b) Da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ stetig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right) &= \cos\left(\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x\to +\infty} \pi \cdot \frac{1-\frac{2}{x^3}}{4+\frac{2}{x^3}}\right) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \ .$$

(b) Berechnen Sie das Integral
$$\int_1^2 \ln(x^x)\ \mathrm{d}x \ .$$

Lösung.

(a) Wir substituieren $u(x) := x^2$. Mit $u'(x) = 2x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \textstyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{u'(x)}{2}\cos(u(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \textstyle[\frac{1}{2}\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \textstyle\frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

(b) Es ist $\ln(x^x) = \ln(\mathrm{e}^{\ln(x)\cdot x}) = \ln(x)\cdot x = x\cdot\ln(x)$.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(x^x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 x\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{2^2}{2}\cdot\ln(2) - \frac{1^2}{2}\cdot\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x, y) \mapsto f(x, y) := -5x^2 + 2x + 4xy - y^2 - 5$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Berechnen Sie die Flachstelle P von f.

(c) Ist P eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f?

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} -10x+2+4y \\ 4x-2y \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

(b) Eine Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x, y) = 0$ gilt.

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -10x + 2 + 4y &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

lösen:

Aus der 2. Gleichung folgt, dass $y = 2x$ ist.

Damit folgt aus der 1. Gleichung, dass $-10x + 2 + 8x = 0$ ist, d.h. $x = 1$.

Somit ist $P := (1, 2)$ die einzige Flachstelle von f.

(c) Um zu überprüfen, ob bei P eine lokale Minimalstelle, Maximalstelle oder Sattelstelle vorliegt, müssen wir die positive oder negative Definitheit von $\mathrm{H}_f(P)$ überprüfen.

Es ist $\mathrm{H}_f(1, 2) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(P)) = -10 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(P)) = \det(\mathrm{H}_f(P)) = 4 > 0$. Somit ist sie negativ definit. Also ist $(1, 2)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) &:=& \ \tfrac{1}{4}(y^4 - x^4) - x^2y - yz \\ g = g_1 \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) &:=& \ \pi(z^2-1) - 2\sin(\pi xy) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x^3-2xy \\ y^3-x^2-z \\ -y \end{pmatrix}$ und $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2\pi y\cos(\pi xy) \\ -2\pi x\cos(\pi xy) \\ 2\pi z \end{pmatrix}$.

Es ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3x^2-2y & -2x & 0 \\ -2x & 3y^2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\pi^2y^2\sin(\pi xy) & -2\pi\cos(\pi xy)+2\pi^2xy\sin(\pi xy) & 0 \\ -2\pi\cos(\pi xy)+2\pi^2xy\sin(\pi xy) & 2\pi^2x^2\sin(\pi xy) & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix} .$$

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Für ein $\rho \in \mathbb{R}$ soll $\nabla_f(x,y,z) = \rho \cdot \nabla_g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$ gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} -x^3 - 2xy &= \rho \cdot (-2\pi y\cos(\pi xy)) \\ y^3 - x^2 - z &= \rho \cdot (-2\pi x\cos(\pi xy)) \\ -y &= \rho \cdot (2\pi z) \\ \pi(z^2-1) - 2\sin(\pi xy) &= 0 \end{aligned}$$

(c) Einsetzen des Punktes $P = (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$\begin{aligned} 1 &= \rho \cdot (-2\pi) \\ -1 &= \rho \cdot 2\pi \\ 1 &= \rho \cdot (-2\pi) \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dies wird durch $\rho = -\frac{1}{2\pi}$ gelöst.

Da $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 2\pi \\ -2\pi \end{pmatrix}$ nur aus einer Spalte ungleich null besteht, ist das Spaltentupel von $N(P)$ linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \rho = -\frac{1}{2\pi}$.

(d) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Es ist $H = \mathrm{H}_f(P) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen eine Matrix U, deren Spaltentupel eine Basis von $\{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : N(P)^{\mathrm{t}} u = 0\}$ ist.

Eine Basis des Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $N(P)^{\mathrm{t}} u = 0$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A . \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind $\mathrm{M}_1(A) = 0$ und

$$\mathrm{M}_2(A) = \det(A) = -1 .$$

Mithin ist A weder positiv noch negativ definit, hat aber Determinante ungleich null.

Folglich ist $P = (1, -1, -1)$ eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 5 (4+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{2x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\mathrm{i}} + \frac{C}{x-\mathrm{i}}$$

für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(b) Berechnen Sie auf $\mathbb{R}_{>0}$ das Integral

$$\int \frac{2x+2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Lösung.

(a) Die angegebene Gleichung wird nach Multiplikation mit $x(x^2+1)$ zu

$$\begin{aligned} 2x+2 &= A(x^2+1) + Bx(x-\mathrm{i}) + Cx(x+\mathrm{i}) \\ 2x+2 &= (A+B+C)x^2 + \mathrm{i}(C-B)x + A \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Dieses bringen wir auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2-2\mathrm{i} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -1-\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -1-\mathrm{i} \end{array}\right)$$

Damit ist $A = 2$, $B = -1+\mathrm{i}$ und $C = -1-\mathrm{i}$.

Wir erhalten

$$\frac{2x+2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} + \frac{-1-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}.$$

(b) Unter Verwendung der Partialbruchzerlegung aus (a) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x} + \frac{-1+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} + \frac{-1-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-1+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} + \frac{-1-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2\ln(x) - \ln(x^2+1) + 2\arctan(x)\right].
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Sei ein Sparvertrag geplant mit Startkapital $K_0 = 500$€. Es soll nachschüssig jährlich eine Rate von $R = 30$€ eingezahlt werden. Der Zinssatz betrage $p = 1\%$.

(1) Berechnen Sie das Guthaben nach einem Jahr.

(2) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 4000€ erreicht ist?

(b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 25% angelegt werden, also zu einem Zinsfaktor von $q = \frac{5}{4}$.

Jeweils zum Jahresende soll eine Auszahlung von 100€ getätigt werden.

Wie hoch muss K_0 sein, damit nach 2 Jahren das Kapital aufgebraucht ist, also $K_2 = 0$ ist?

Lösung.

(a) (1) Bei nachschüssiger Zahlung ist $K_n = q^n \cdot K_0 + \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R$.

Es ist $K_1 = 1{,}01 \cdot 500 + 30 = 535$.

Das Guthaben nach einem Jahr beträgt also 535€.

(2) Bei nachschüssiger Zahlung ist $n = \log_q \left(\dfrac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}} \right)$.

Mit $K_n = 4000$, $K_0 = 500$, $q = 1{,}01$ und $R = 30$ ergibt sich

$$n = \log_{1,01} \left(\frac{4000 + \frac{30}{0,01}}{500 + \frac{30}{0,01}} \right) = \log_{1,01} \left(\frac{7000}{3500} \right) = \log_{1,01}(2) \ .$$

(b) Bei nachschüssiger Zahlung gilt $K_0 = q^{-n} \left(K_n - \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \right)$.

Für $n = 2$, $K_2 = 0$, $R = -100$ und $q = \frac{5}{4}$ ist somit

$$\begin{aligned} K_0 &= \left(\tfrac{5}{4}\right)^{-2} \left(0 - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}{\frac{5}{4} - 1} \cdot (-100) \right) \\ &= \left(\tfrac{4}{5}\right)^{2} \left(\frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{\frac{1}{4}} \cdot 100 \right) \\ &= \tfrac{16}{25} \cdot \tfrac{9}{4} \cdot 100 \\ &= 144 \ . \end{aligned}$$

Es wird somit ein Startkapital von 144€ benötigt.

Aufgabe 7 (3+4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y' \ = \ \cos(x) \cdot y \qquad \text{und} \qquad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ = \ 1\ .$$

(b) Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 2y' + y = x + 3\ .$$

Lösung.

(a) Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung von der Form $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(y) = y$.

Aus der Anfangswertbedingung entnehmen wir $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ und $y_0 = 1$.

Wir setzen $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_{\frac{3\pi}{2}}^{x} = \sin(x) + 1$

und $H(w) := \int_{y_0}^{w} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{w} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^w = \ln(w)$.

Es soll $H(y(x)) = F(x)$ sein, also $\ln(y(x)) = \sin(x) + 1$ und somit

$$y(x) \ = \ \mathrm{e}^{\sin(x)+1}\ .$$

Alternativ kann diese Differentialgleichung auch als homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $y'(x) = a(x) \cdot y$ angesehen werden.

Es ist $a(x) = \cos(x)$.

Diesenfalls bilden wir $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_{\frac{3\pi}{2}}^{x} = \sin(x) + 1$.

Wir erhalten

$$y(x) \ = \ \mathrm{e}^{A(x)} \cdot y_0 \ = \ \mathrm{e}^{\sin(x)+1}\ .$$

(b) Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by = c(x)$$

mit $a = -1$, $b = 1$ und $c(x) = x + 3$.

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' - 2u' + u = 0$.

Es ist $a^2 = 1 = b$. Somit ist jede Lösung von der Form

$$u(x) = \mathrm{e}^{x}(r + sx)\ ,$$

wobei $r, s \in \mathbb{R}$.

Um alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, genügt es, eine Lösung $\hat{y}(x)$ zu finden und dann die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu addieren.

Es ist $c(x) = x + 3$ ein Polynom von Grad 1. Daher machen wir den Ansatz

$$\hat{y}(x) = c_1 x + c_0$$

mit $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen c_1 und c_0, indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung

$$\hat{y}'' - 2\hat{y}' + \hat{y} \ = \ x + 3$$

einsetzen.

Es ist $\hat{y}' = c_1$ und $\hat{y}'' = 0$.

Nun soll $x + 3 \stackrel{!}{=} \hat{y}'' - 2\hat{y}' + \hat{y} = -2c_1 + (c_1 x + c_0)$ sein.

Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen $3 = -2c_1 + c_0$ und $1 = c_1$.

Nun folgt $c_1 = 1$ und $c_0 = 5$.

Somit ist $\hat{y}(x) = x + 5$.

Das heißt, jede Lösung von $y'' - 2y' + y = x + 3$ ist von der Form

$$y(x) = u(x) + \hat{y}(x) = \mathrm{e}^x(r + sx) + x + 5$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8 (2+1+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{(2+\mathrm{i})^2} = a + b\mathrm{i}$: $a = \boxed{\frac{3}{25}}$, $b = \boxed{-\frac{4}{25}}$

(b) Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\pi\mathrm{i})^n}{n!} = \boxed{-\mathrm{e}}$

(c) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definiert durch $x_{n+1} = 2x_n + 1$ und $x_0 = 0$. Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form: $x_n = \boxed{-1 + 2^n}$.

Aufgabe 9 (2+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^3$. Sei $x_0 := 1$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$$T_2(x) = \boxed{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2}$$

(b) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ an, für welches $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}$. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

$$R_2(x) = \boxed{3\int_1^x (x-t)^2 \, \mathrm{d}t}$$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 12 (1+1+1+1 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Parameter. Seien $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Berechnen Sie den Cosinus des von b_s und c eingeschlossenen Winkels φ.

$$\cos(\varphi) \ = \ \frac{2}{3}$$

(b) Berechnen Sie:

$$b_s \times c \ = \ s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von b_s und c aufgespannten Parallelogramms in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$s\sqrt{5}$$

(d) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass das Volumen des von a, b_s und c aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

$$s \ = \ \frac{1}{3}$$

Aufgabe 13 (2 Punkte)

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $8\sin(x)^2\cos(x) \ = \ a\cos(x) + b\cos(3x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

$a \ = \ 2$ $\qquad$ $b \ = \ -2$