Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe	Note
Punkte	/5	/2	/3	/4	/8	/2	/3	/3	/ 30	

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die **Ergebnisse** sind in fertiggerechneter Form in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Formen Sie A in Zeilenstufenform um.

Zeilenstufenform: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\}$ und die Dimension von U.

Basis: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim(U) =$ 2

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 1.

$$T_1(x) = \boxed{1 + \frac{1}{2}(x-1)}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$$T_2(x) = \boxed{1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $$\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}}\right]$$

(b) $$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\frac{1}{\cos(x)}}\right]$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>-2} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{-x}{(x+2)(x+3)}$.

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$:

$$f(x) = \boxed{\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}}$$

(b) Berechnen Sie: $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{2\ln(x+2) - 3\ln(x+3)}\right]$$

(c) Berechnen Sie: $$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{5\ln(2) - 3\ln(3)}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte) Seien

$$f \; : \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; : \; (x,y,z) \;\mapsto\; f(x,y,z) \;:=\; 3x^2 - 2xyz$$
$$g \; : \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; : \; (x,y,z) \;\mapsto\; g(x,y,z) \;:=\; -x + y + 2z - 3\,.$$

Es soll untersucht werden, ob $(1,2,1)$ eine lokale Extremstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$$\nabla_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 6x - 2yz \\ -2xz \\ -2xy \end{pmatrix}} \qquad \nabla_g(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie $\rho \in \mathbb{R}$ so, dass $\nabla_f(1,2,1) = \nabla_g(1,2,1) \cdot \rho$ ist: $\rho = \boxed{-2}$

(c) Bestimmen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und dann die Matrix $H := \mathrm{H}_f(1,2,1) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(1,2,1)$.

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -2z & -2y \\ -2z & 0 & -2x \\ -2y & -2x & 0 \end{pmatrix}} \qquad H = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(d) Sei $N = N(1,2,1) = \nabla_g(1,2,1) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Sei U eine Matrix, deren Spaltentupel eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \; : \; N^{\mathrm{t}} u = 0 \,\}$ ist. Man berechne U und $U^{\mathrm{t}} H\, U$.

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U^{\mathrm{t}} H\, U = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}$$

(e) Auf die Stelle $(1,2,1)$ treffen welche der folgenden Charakterisierungen unter Nebenbedingung $g = 0$ zu? Tragen Sie an **jeder** Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

	Flachstelle	lokale Minimalstelle	lokale Maximalstelle	Sattelstelle
$(1,2,1)$	ja	ja	nein	nein

Aufgabe 6 (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := 10 \cdot 0{,}82^x$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x) =$ $\boxed{10 \cdot \ln(0{,}82) \cdot 0{,}82^x}$

(b) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathrm{E}_f(x) =$ $\boxed{\ln(0{,}82) \cdot x}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & s \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A_s) =$ $\boxed{s+3}$

(b) Berechnen Sie: $\det(2A_s^2) =$ $\boxed{8(s+3)^2}$

(c) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s invertierbar? Antwort: $\boxed{\text{Für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.}$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Seien $(t_1, t_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $(u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Es ist (t_1, t_2) eine Basis von $T := \langle t_1, t_2 \rangle$ und (u_1, u_2) eine Basis von $U := \langle u_1, u_2 \rangle$.

Es ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix mit dem Spaltentupel (t_1, t_2, u_1, u_2).

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A.

Zeilenstufenform: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$. Bestimmen Sie die Dimension von $T + U$.

Basis von $T \cap U$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ $\dim(T + U)$: $\boxed{3}$
