Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe	Note
Punkte	/5	/2	/3	/4	/8	/3	/3	/2	/ 30	

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Scheinklausur

für Wirtschaftsinformatik

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die **Ergebnisse** sind in fertiggerechneter Form in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Formen Sie A in Zeilenstufenform um.

Zeilenstufenform: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = 0\}$ und die Dimension von U.

Basis: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim(U) =$ 2

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 1.

$$T_1(x) = \boxed{1 + \frac{1}{2}(x-1)}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$$T_2(x) = \boxed{1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $$\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}}\right]$$

(b) $$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\frac{1}{\cos(x)}}\right]$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $x^2 + 2x + 5 = (x+a)^2 + b^2$ ist.

$a = \boxed{1}$ $\qquad$ $b = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$:

$$f(x) = \boxed{\frac{\frac{\mathrm{i}}{4}}{x+1+2\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{4}}{x+1-2\mathrm{i}}}$$

(c) Berechnen Sie: $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{x+1}{2}\right)}\right]$$

Aufgabe 5 (8 Punkte) Seien

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ (x,y,z) \ \mapsto \ f(x,y,z) \ := \ 3x^2 - 2xyz \\ g \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ (x,y,z) \ \mapsto \ g(x,y,z) \ := \ -x + y + 2z - 3 \ . \end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob $(1,2,1)$ eine lokale Extremstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x - 2yz \\ -2xz \\ -2xy \end{pmatrix} \qquad \nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\rho \in \mathbb{R}$ so, dass $\nabla_f(1,2,1) = \nabla_g(1,2,1) \cdot \rho$ ist: $\rho = -2$

(c) Bestimmen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und dann die Matrix $H := \mathrm{H}_f(1,2,1) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(1,2,1)$.

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & -2z & -2y \\ -2z & 0 & -2x \\ -2y & -2x & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Sei $N = N(1,2,1) = \nabla_g(1,2,1) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Sei U eine Matrix, deren Spaltentupel eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \ : \ N^{\mathrm{t}} u = 0 \,\}$ ist. Man berechne U und $U^{\mathrm{t}} H \, U$.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{\mathrm{t}} H \, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(e) Auf die Stelle $(1,2,1)$ treffen welche der folgenden Charakterisierungen unter Nebenbedingung $g = 0$ zu? Tragen Sie an **jeder** Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

	Flachstelle	lokale Minimalstelle	lokale Maximalstelle	Sattelstelle
$(1,2,1)$	ja	ja	nein	nein

Aufgabe 6 (3 Punkte) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & s \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A_s) =$ $\boxed{s+3}$

(b) Berechnen Sie: $\det(2A_s^2) =$ $\boxed{8(s+3)^2}$

(c) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s invertierbar? Antwort: $\boxed{\text{Für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Lösen Sie:

(a) Berechnen Sie: $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{6+2\mathrm{i}} = \boxed{\dfrac{9+2\mathrm{i}}{10}}$

(b) Bestimmen Sie a, $b \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x)^3 = a\cos(x) + b\cos(3x)$.

$a = \boxed{\dfrac{3}{4}}$ $b = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

Aufgabe 8 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$ auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit

$$y' = \mathrm{e}^{x+y} \qquad \text{und} \qquad y(0) = 0\,.$$

$y(x) = \boxed{-\ln\left(2 - \mathrm{e}^x\right)}$
