Günthner, Krauß, Künzer, Winkle **Donnerstag 24.02.2022**

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe	Note
Punkte	/4	/3	/3	/3	/8	/4	/3	/2	/ 30	

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Scheinklausur

für Wirtschaftsinformatik

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die **Ergebnisse** sind in fertiggerechneter Form in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten: $\binom{8}{3} = \boxed{56}$

(b) Berechnen Sie: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \boxed{\frac{5}{4}}$

(c) Berechnen Sie: $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2)}{x-1} = \boxed{2}$

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aufgespannten Parallelogramms: $\boxed{\sqrt{21}}$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie folgende inverse Matrix in $\mathbb{R}^{3\times3}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es laufe ein Sparvertrag. Der jährliche Zinssatz betrage $p = 10\%$.
Sei $K_1 = 1210$€ das Kapital nach einem Jahr.

(a) Welchen Betrag an Zinsen hat die Bank nach einem Jahr bezahlt?

Antwort: $K_1 - K_0 = \boxed{110}$ €

(b) Berechnen Sie das Guthaben nach zwei Jahren: $K_2 = \boxed{1331}$ €

(c) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von $2 \cdot K_0$ erreicht ist?

Es dauert $n = \boxed{\log_{1,1}(2)}$ Jahre.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

(a) Bestimmen Sie den Hauptminor $\mathrm{M}_1(A_s) = \boxed{s}$

(b) Bestimmen Sie den Hauptminor $\mathrm{M}_2(A_s) = \boxed{s-4}$

(c) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s positiv definit? Antwort: $\boxed{\text{Für } s \in \mathbb{R}_{>4}\,.}$

Aufgabe 5 (8 Punkte) Seien

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := 3y^3 + xyz \\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) := x - 7y - 2z - 3 \,. \end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob $(-2,-1,1)$ eine lokale Extremstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ 9y^2 + xz \\ xy \end{pmatrix} \qquad \nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\rho \in \mathbb{R}$ so, dass $\nabla_f(-2,-1,1) = \nabla_g(-2,-1,1) \cdot \rho$ ist: $\rho = -1$

(c) Bestimmen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und die Matrix $H := \mathrm{H}_f(-2,-1,1) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(-2,-1,1)$.

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 18y & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -18 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Sei $N = N(-2,-1,1) = \nabla_g(-2,-1,1) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Sei U eine Matrix, deren Spaltentupel eine Basis von $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : N^{\mathrm{t}} u = 0 \,\}$ ist. Man berechne U und $U^{\mathrm{t}} H\, U$.

$$U = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{\mathrm{t}} H\, U = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

(e) Auf die Stelle $(-2,-1,1)$ treffen welche der folgenden Charakterisierungen unter Nebenbedingung $g = 0$ zu? Tragen Sie an **jeder** Stelle der folgenden Tabelle **„ja“** oder **„nein“** ein.

	Flachstelle	lokale Minimalstelle	lokale Maximalstelle	Sattelstelle
$(-2,-1,1)$	ja	nein	nein	ja

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \dfrac{2}{x^2 + 4x + 8}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $x^2 + 4x + 8 = (x + a)^2 + b^2$ ist.

$a = \boxed{2}$ $b = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$:

$$f(x) = \boxed{\frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{x + 2 + 2\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{x + 2 - 2\mathrm{i}}}$$

(c) Berechnen Sie: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ \boxed{\arctan\left(\tfrac{x+2}{2}\right)}\ \right]$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$ mit $y' = -y$ und $y(0) = 2$.

$y(x) = \boxed{2\mathrm{e}^{-x}}$

(b) Bestimmen Sie die Funktion $y = y(x)$ mit $y' = -y + 2x$ und $y(0) = 2$.

$y(x) = \boxed{4\mathrm{e}^{-x} + 2x - 2}$

Aufgabe 8 (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{8}{x + y}$.

(a) Bestimmen Sie die Näherung erster Ordnung von f um die Stelle $(1, 1)$:

$$\boxed{4 - 2(x - 1) - 2(y - 1)}$$

(b) Bestimmen Sie die Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle $(1, 1)$:

$$\boxed{4 - 2(x - 1) - 2(y - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2}$$
