Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5 Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

$$f(x) = 2x \quad \text{und} \quad g(x) = x^3$$

Bestimmen Sie f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $g \circ f$ und $(g \circ f)^{-1}$.

Platzaufgabe 6 Sei $X := \{\, z \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leqslant z \leqslant 24 \,\} = \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$.
Sei $A := \{x \in X : x \text{ ist durch 4 teilbar}\} \subseteq X$.
Sei $B := \{x \in X : x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq X$.

(a) Man bestimme A und B.

(b) Man bestimme $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$.

(c) Sei die Abbildung $f : A \cup B \to X : y \mapsto \frac{y}{2}$ gegeben. Ist $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$?

Platzaufgabe 7 Berechnen Sie jeweils die ersten drei Folgenglieder. Welche Folgen sind konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(\dfrac{3n^2 + 2n}{(2n-3)^2} \right)_{n \geqslant 1}$

(b) $\left(\dfrac{8}{(3n-1)^2} \dbinom{n}{n-2} \right)_{n \geqslant 2}$

(c) $\left(\dfrac{\sin(n)}{n} \right)_{n \geqslant 1}$

(d) $(2n)_{n \geqslant 1}$
Kann man Konvergenz anhand einer Skizze entscheiden?

Platzaufgabe 8 Wir wollen überprüfen: Für $x \in \mathbb{R}_{>1}$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} = 1$.
Wir gehen folgendermaßen vor:

- Sei $a_n := \sqrt[n]{x} - 1 > 0$ für $n \geqslant 1$. Rechnen Sie nach: Es ist

$$x = (1 + a_n)^n \geqslant n \cdot a_n \geqslant 0\ .$$

  Hierbei kann der binomische Lehrsatz helfen, um die erste Ungleichung zu bekommen.

- Folgern Sie: Es ist $\frac{x}{n} \geqslant a_n \geqslant 0$ für $n \geqslant 1$.

- Bestimmen Sie mit dem Sandwichlemma $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

- Folgern Sie mit den Rechenregeln für Grenzwerte, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + 1 = 1$ gilt.

Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 2

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 11.11.21 in den Präsenzübungen oder bis Mi 10.11.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 5

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := \frac{4}{x^2+2}$.
Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

(b) Sei $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x) := x - x^{-1}$. Skizzieren Sie den Graphen von u.
Bestimmen Sie $u^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, indem Sie $y = x - x^{-1}$ mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach x auflösen. Welches Vorzeichen sollte hierbei gewählt werden?

Hausaufgabe 6 Sei $X := \{\, z \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leqslant z \leqslant 7 \,\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sei

$$f : X \to \{-1, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } x \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Finden Sie Teilmengen $A, B, C \subseteq X$, welche die Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen:

(1) Die Mengen A, B bestehen aus je drei Elementen.

(2) Es besteht $A \cap B$ aus 2 Elementen.

(3) Es ist $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(4) Es ist $f(A \cap B) = f(C)$ und $C \neq A \cap B$.

Hausaufgabe 7 Bestimmen Sie unter Verwendung des Sandwichlemmas.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \sin(n^2)}{n^2 + n + 1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k^2}$

Hausaufgabe 8

(a) Bestimmen Sie $x := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2 - 1}$ mittels Grenzwertregeln.

(b) Überprüfen Sie mittels der Definition für Grenzwerte, dass Ihre Antwort in Teil (a) richtig ist.
Man hat also zu überprüfen: Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ mit $|x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon$ für $n \geqslant \ell$.
Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} \,:\, |x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon \,\}$ der genannten Ungleichung.
- Welche $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ sind wählbar, um die Bedingung zu erfüllen, es solle $|x - \frac{2n^2}{n^2-1}| < \varepsilon$ sein für $n \geqslant \ell$?