

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 9 Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender konvergenter Reihen.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{11}\right)^n \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n-2}} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{7^n + n!}{7^n \cdot n!}$$

Platzaufgabe 10 Seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \sin\left(\frac{\pi \cdot (x^2+1)}{2x^2+x+9}\right) \text{ und} \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := (\sqrt{x^2+1} - x)x$$

gegeben. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Hinweis: Erweitern mit $\sqrt{x^2+1} + x$.

Platzaufgabe 11 Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 4$ gegeben. Ihr Graph ist $\Gamma_f = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x_1, x_2)\}$. Folgende Skizzen sollen in ein gemeinsames dreidimensionales Koordinatensystem mit x_1 -Achse, x_2 -Achse und y -Achse skizziert werden.

(a) Der Schnitt von Γ_f mit der Koordinatenebene $x_1 = 0$, d.h. die Menge

$$\{(0, x_2, y) : x_2, y \in \mathbb{R} \text{ und } y = f(0, x_2)\}.$$

(b) Der Schnitt von Γ_f mit der Koordinatenebene $y = 0$, d.h. die Menge

$$\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ und } f(x_1, x_2) = 0\}.$$

Platzaufgabe 12

(a) Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + b & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f .

(b) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := \frac{1}{2}x + 5$ und $x_0 := 2$.

Überprüfen Sie direkt mit der Definition, dass g stetig ist in x_0 . Finden Sie hierzu für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ gilt.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 18.11.21 in den Präsenzübungen oder bis Mi 17.11.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 9 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot n!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{7^{n-2}} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n}\right)$$

Hausaufgabe 10 Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2) \mapsto 4x_1^2 + x_2^2 - 9$ gegeben. Ihr Graph ist $\Gamma_f = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x_1, x_2)\}$. Folgende Skizzen sollen in ein gemeinsames dreidimensionales Koordinatensystem mit x_1 -Achse, x_2 -Achse und y -Achse skizziert werden.

- Der Schnitt von Γ_f mit der Koordinatenebene $x_1 = 0$.
- Der Schnitt von Γ_f mit der Koordinatenebene $x_2 = 0$.
- Der Schnitt von Γ_f mit der Koordinatenebene $y = 0$, d.h. die Menge $M := \{(x_1, x_2, 0) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } f(x_1, x_2) = 0\}$.
- Bestimmen sie zwei Elemente $\underline{a}, \underline{b} \in M$, die Abstand $\|\underline{a} - \underline{b}\| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ haben.

Hausaufgabe 11

- Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq -1 \\ a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) & \text{für } x > -1 \end{cases}$ stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f .
- Konstruieren Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften (1, 2, 3).
 - Es ist g nicht stetig an der Stelle $x_0 := 2$, aber an allen anderen Stellen.
 - Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
 - Es existiert $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ nicht in \mathbb{R} .

Skizzieren Sie den Graphen von g .

Hausaufgabe 12 Seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{3}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := (\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4-2})x^2 \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$