Günthner, Krauß, Künzer Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 32 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \cos(\frac{3x}{2})$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(k)}(x)$ für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Bestimmen Sie $f^{(k)}(\pi)$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ von $f(x)$ um $x_0 := \pi$ von Ordnung 3.

(d) Geben Sie das Restglied $R_3(x)$ an, für welches $f(x) = T_3(x) + R_3(x)$ gilt. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

(e) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)| \leqslant C \cdot |x - \pi|^4$ für $x \in [\pi, 2\pi]$. Für die Abschätzung kann man $|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$ verwenden, wobei $g(x)$ die im Restglied auftretende zu integrierende Funktion ist.

Platzaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := \sin(x) \cdot y$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie $\nabla_f(\frac{\pi}{4}, 1)$ und $\mathrm{H}_f(\frac{\pi}{4}, 1)$.

(c) Bestimmen Sie die Näherung erster Ordnung von f um die Stelle $(\frac{\pi}{4}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Bestimmen Sie die Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle $(\frac{\pi}{4}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Platzaufgabe 34

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei die Matrix

$$A_s := \begin{pmatrix} s & s \\ 1-s & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben. Berechnen Sie $\det(A_s)$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s nicht invertierbar?

(b) Sei $B := \left(\begin{smallmatrix} 3&2&2 \\ 2&3&2 \\ 2&2&3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(1) Berechnen Sie $\det(B)$ mit der Regel von Sarrus.
(2) Berechnen Sie $\det(B)$ ohne die Regel von Sarrus.
(3) Entscheiden Sie, ob B positiv definit ist.
(4) Berechnen Sie $\det(2B^{\mathrm{t}}B)$.

Platzaufgabe 35 Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner benutzen.
Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_3(x)$ aus Platzaufgabe 32, im Bereich $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, in eine gemeinsame Zeichnung.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 9

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 20.01.22 in den Präsenzübungen oder bis Mi 19.01.22 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R}_{>-3} \to \mathbb{R} :\ x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x+3}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ von $f(x)$ um $x_0 := -1$ von Ordnung 1.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 := -1$ von Ordnung 2.

(c) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ an, für welches $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}_{>-3}$. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

(d) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$, im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant 3$, in eine gemeinsame Zeichnung.

Hausaufgabe 34 Bestimmen Sie jeweils den Gradienten und die Hessematrix.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := -\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) := x\mathrm{e}^{yz}$.

Hausaufgabe 35 Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei

$$f :\ D \to \mathbb{R} :\ (x, y) \mapsto f(x, y) := \ln((3x + y)^3)\ .$$

(a) Skizzieren Sie $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Markieren Sie darin den Punkt $(1, 0) \in D$.

(b) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(c) Bestimmen Sie die Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle $(1, 0) \in D$.

Hausaufgabe 36

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s := \begin{pmatrix} s & 2 & 5 \\ 3 & -2 & s \\ 0 & 0 & 3s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix A_s invertierbar ist.

(b) Sei $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie die Hauptminoren $\mathrm{M}_1(B)$, $\mathrm{M}_2(B)$, $\mathrm{M}_3(B)$ und $\mathrm{M}_4(B)$.

Entscheiden Sie, ob B positiv definit ist. Entscheiden Sie, ob B negativ definit ist.