Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 10

Platzaufgaben

Platzaufgabe 36 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 - 4)(y^2 - 9)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ von f.

Markieren Sie darin mit $+$ die Bereiche, in denen f positive Funktionswerte hat.

Markieren Sie darin mit $-$ die Bereiche, in denen f negative Funktionswerte hat.

(d) Entscheiden Sie unter Verwendung der Hessematrix, ob $(2, 3)$ eine lokale Extremstelle ist. Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe der Skizze.

(e) Entscheiden Sie unter Verwendung der Hessematrix, ob $(0, 0)$ eine lokale Extremstelle ist.

Platzaufgabe 37 Wir betrachten zwei Güter A und B. Sei x die Konsummenge von A. Sei y die Konsummenge von B.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 + xy + y$, die Nutzenfunktion eines Haushalts. Mit der Nutzenfunktion können Güterbündel verglichen werden: der Haushalt präferiert das Güterbündel mit dem höchsten Nutzen.

Eine Einheit von A kostet 5€, eine Einheit von B kostet 2€. Dem Haushalt stehen 95€ zur Verfügung. Daher ergibt sich mit $g = g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y) := 5x + 2y - 95$ die Nebenbedingung $g(x, y) = 5x + 2y - 95 = 0$, auch Budgetrestriktion genannt.

(a) Bestimmen Sie die Flachstelle P von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Stelle P eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Platzaufgabe 38 Seien die Funktionen

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\underline{x}) &&:= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
g_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto g_1(\underline{x}) &&:= x_1^2 + x_2^2 - 25 \\
g_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto g_2(\underline{x}) &&:= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 15
\end{aligned}$$

gegeben. Schreibe $g := (g_1, g_2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(\underline{x})$, $\nabla_{g_1}(\underline{x})$ und $\nabla_{g_2}(\underline{x})$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Welche der folgenden Punkte sind Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Welche sind lokale Minimalstellen und welche sind lokale Maximalstellen?

$P_1 := (0, 5, 1)$, $\quad P_2 := (5, 0, 0)$, $\quad P_3 := (3, 4, -2)$

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 10

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 27.01.22 in den Präsenzübungen oder bis Mi 26.01.22 um 23:55 Uhr im Ilias.
Die Anmeldung zur zweiten Scheinklausur läuft bis zum 07.02.22 im Ilias unter
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_book_2796971.html`

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y^2)(x^2 - y)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$. Überprüfen Sie, dass $(1, 1)$ eine Flachstelle von f ist.

(b) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ von f.
Markieren Sie darin mit $+$ die Bereiche, in denen f positive Funktionswerte hat.
Markieren Sie darin mit $-$ die Bereiche, in denen f negative Funktionswerte hat.

(c) Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1, 1)$ eine lokale Extremstelle von f ist.

(d) Entscheiden Sie unter Verwendung der Hessematrix, ob $(1, 1)$ eine lokale Extremstelle ist.

Hausaufgabe 38 Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x + y + z + \dfrac{1}{xyz}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$.

(b) Bestimmen Sie eine Flachstelle von f. Entscheiden Sie, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Hausaufgabe 39 Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) & := & y(z^2 + x^2) - 3y^2 \\ g = g_1 & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) & := & y^2 + \frac{1}{2}(x + z)^2 - 9 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\nabla_g(x, y, z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_g(x, y, z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.
Sei $P := (0, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$. Man überprüfe, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(c) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Hausaufgabe 40 Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (w, x, y, z) \mapsto f(w, x, y, z) & := & wxyz \\ g_1 & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (w, x, y, z) \mapsto g_1(w, x, y, z) & := & w - z \\ g_2 & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (w, x, y, z) \mapsto g_2(w, x, y, z) & := & x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 \end{array}$$

Schreibe $g := (g_1, g_2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(w, x, y, z)$, $\nabla_{g_1}(w, x, y, z)$ und $\nabla_{g_2}(w, x, y, z)$.
Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(w, x, y, z)$, $\mathrm{H}_{g_1}(w, x, y, z)$ und $\mathrm{H}_{g_2}(w, x, y, z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.
Sei $P := (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Man überprüfe, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(c) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?