Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 7

Vortragsübung am 9.12.21

Aufgabe 1 Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}.$$

(1) Ist das Tupel (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

(2) Welche der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ liegen im Erzeugnis von (v_1, v_2, v_3)?

Aufgabe 2 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&0\\3&3&0&0\\4&0&0&1\end{pmatrix}$$

(1) Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $AX = B$.

(2) Bestimmen Sie eine Matrix $Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $YA = B$.

Aufgabe 3 Seien

$$(t_1, t_2, t_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right) \text{ und } (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right).$$

Es ist (t_1, t_2, t_3) eine Basis von $T := \langle t_1, t_2, t_3\rangle$. Es ist (u_1, u_2, u_3) eine Basis von $U := \langle u_1, u_2, u_3\rangle$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

(c) Bestätigen Sie durch direkte Rechnung, dass hier $\dim(T + U) + \dim(T \cap U) = \dim(T) + \dim(U)$ gilt.

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$.

(1) Bestimmen Sie f'.

(2) Bestimmen Sie damit $\int_1^3 x^x(\ln(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

(3) Zeigen Sie mittels (2): Es gilt $\int_1^3 x^x\,\mathrm{d}x \leqslant 26$.
Welche Abschätzung ergibt sich unter Verwendung von Maxima, aufgeteilt auf die Bereiche $[1, 2]$ und $[2, 3]$?