Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 9

Vortragsübung am 13.01.22

Aufgabe 1 Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R} : \ x \mapsto f(x) := \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ das Taylorpolynom $T_n(x)$ von $f(x)$ um $x_0 := 0$ von Ordnung n.

(b) Geben Sie das alternative Restglied $R_n(x)$ an, für welches $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1,1)$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Aufgabe 2 Sei $f : (-2,2) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(k)}(x)$ für $k \in \{0,1,2,3\}$.

(b) Bestimmen Sie $f^{(k)}(0)$ für $k \in \{0,1,2,3\}$.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ von $f(x)$ um $x_0 := 0$ von Ordnung 3.

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) := (x^2 - 2x - 2)(y^2 - 4y + 2)$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

(b) Geben Sie die Näherung zweiter Ordnung von f um die Stelle $(1,2)$ an.

(c) Entscheiden Sie, ob die Hessematrix von f im Punkt $(1,2)$ negativ definit ist oder nicht.

Aufgabe 4 Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(3A)$ und $\det(B)$.

(b) Bestimmen Sie die Hauptminoren $\mathrm{M}_1(A)$, $\mathrm{M}_2(A)$, $\mathrm{M}_1(B)$, $\mathrm{M}_2(B)$ und $\mathrm{M}_3(B)$.

(c) Entscheiden Sie ob die Matrizen A, B positiv definit sind oder nicht.