Gruppenübung 1

Aufgabe 1 (schriftliche Aufgabe - 4 Punkte)

i. Berechnen Sie die Summe der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k + 5}{4^k}.$$

ii. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$$

Hinweis: verwenden Sie die Konvergenz- und Divergenzkriterien in Kapitel 14 des Skripts.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, 2^{-n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \qquad \text{c)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} \qquad \text{f)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$$

Aufgabe 3

i. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n^2 + 2}\right)^{\alpha}$$

konvergent oder sogar absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Untersuchen Sie jeweils die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\text{a)}\ a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \qquad \text{b)}\ a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \text{falls } k \leq 2017, \\ 2^{-k}, & \text{falls } k > 2017. \end{cases}$$

$$\text{c)}\ a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 4
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort. Die Falschheit einer Aussage kann man durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n \neq 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dan konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

c) Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ an und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n\, b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n$.

d) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_n|$.

e) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_n|^2$.

f) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Aufgabe 5 (Abschätzung)
Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,3^k}$$

Ihren Wert bezeichnen wir mit s, die n-te Partialsumme mit s_n. Geben Sie ein N an, so dass $|s_N - s| < \frac{1}{2} 10^{-6}$ gilt.