Gruppenübung 2

Aufgabe 1 (schriftliche Aufgabe - 4 Punkte)

a. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

$$\text{(i)} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$$

b. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ und es sei $f(x) > 0$. Beweisen Sie dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt mit $x \in I$, so dass $f(y) > 0$ für alle $y \in I$.

Aufgabe 2 (Grenzwert)

a. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

$$\text{(i)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$$

$$\text{(iii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \qquad \text{(iv)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{(\sin(2x))^2}$$

b. Sei $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{1+2x}$. Zeigen Sie mit den ϵ-δ-Argument, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Aufgabe 3 (Stetigkeit)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} a+3 & \text{für } x = -2 \\ x^2+2x-b & \text{für } x \in \,]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,-1] \\ c & \text{für } x \in \,]-1,0[\\ \frac{x^2-d}{x^3+2} & \text{für } x \in [0,2[\\ \frac{1}{5} & \text{für } x \in [2,+\infty[\end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Parameter, so dass die Funktion f auf $]-\infty,+\infty[$ stetig ist.

Aufgabe 4 (Stetige Fortsetzung)
Untersuchen sie, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6} + \frac{(2x-6)^2}{x^2-6x+9}$$

nicht definiert ist, man f durch Zuweisung reeller Funktionswerte stetig fortsetzen kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Funktionswerte.

Aufgabe 5 (Zwischenwertsatz und Intervallhalbierungsverfahren)

a. Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie: es gibt $\xi \in [0, 1]$, so dass $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

b. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[1, 2]$ genau eine Nullstelle besitzt. Benutzen Sie das Intervallhalbierungsverfahren, um ein Intervall von kleinerer Länge als $\epsilon = 0.25$ zu finden, das diese Nullstelle von f enthält.