Gruppenübung 3

Aufgabe 1 (**schriftliche Aufgabe** - 4 Punkte)

a. Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen und bestimmen Sie deren Definitionsbereiche:

i) $f_1 : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = (\cos(2x))e^{\sin(x)} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4}\right)$

ii) $f_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sin\left(\cosh\left(\frac{3x^2-5}{2x}\right)\right)$

b. Berechnen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen den Wert für $(f^{-1})'(f(1))$ für die Funktion $f(x) = x + x^3$.

c. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g in $(\sqrt{3}, g(\sqrt{3}))$.

Aufgabe 2 (Differentiation)

a. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x - 2}$$

unter Verwendung eines geeigneten Differentialquotienten.

b. Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f_1(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{1+x^2} + 3\cos^2 x + \ln(1+x^2)}$

ii) $f_2 :]-2, \infty[\to \mathbb{R}\,,\ f_2(x) = \frac{(2-x)\,e^x}{2+x} + \frac{(2-\cos x)\,e^{\cos x}}{2+\cos x}$

iii) $f_3 :]1, \infty[\to \mathbb{R}\,,\ f_3(x) = \ln\left(\ln x + \ln(2\sqrt[8]{x})\right)$

c. Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen die Ableitung von $g(x) = \arccos(x)$.

Aufgabe 3 (Leibnizregel)

Für Produkte hinreichend oft differenzierbarer Funktionen gilt die Leibnizregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

a. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $h^{(n)}(x)$ für $h(x) = xg(x)$ mit Hilfe der Leibnizregel.

b. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Leibnizregel.

Aufgabe 4 (Differenzierbarkeit)

a. Sei I das größtmögliche Intervall mit $1 \in \mathrm{I}$, auf dem

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,,$$

differenzierbar ist. Geben Sie I an.

b. Beantworten Sie die folgende Frage für m gleich $0, 1, 2$ und 3. Gegeben sei eine Funktion $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g_0(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei weiter $g_k(x) = x^k g_0(x)$. Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ ist $g_k \in C^m(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.