Gruppenübung 4

Aufgabe 1 (**schriftliche Aufgabe** - 4 Punkte)

a. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$$

mit der Regel von de l'Hôpital.

b. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$.

  i. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?

  ii. Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte.

  iii. Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.

Aufgabe 2 (Kurvendiskussion)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2e^{-x}$.

i. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?

ii. Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte.

iii. Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.

Aufgabe 3 (Regeln von de l'Hôpital)
Bestimmen Sie die folgende Grenzwerte mit der Regel von de L'Hospital:

i. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x)-\sin(2x)}{2e^x-2-2x-x^2}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Aufgabe 4 (Wahr oder falsch?)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort. Die Falschheit einer Aussage kann man durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

a. Sei $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, dann folgt daraus, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade, d.h. es gilt $f(x) = f(-x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann nimmt f ein lokales Minimum oder Maximum an.

c. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade. Dann nimmt f ein globales Minimum oder Maximum an.

d. Stetige Funktionen nehmen auf beschränkten, offenen Intervallen stets ein lokales Maximum oder Minimum an.

e. Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

f. Jede beschränkte, differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt ein lokales Minimum oder Maximum an.

g. Jede beschränkte, differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat einen Wendepunkt.

h. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Wenn man den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ berechnen will, darf man dann die Regel von de l'Hôpital anwenden und folgern, dass:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1} = \text{divergent.}$$

Aufgabe 5 (Mittelwertsatz- Satz von Rolle)

a. Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty[$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

b. Berechnen Sie mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung den Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x^\beta - x_0^\beta}$ für $x_0 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

c. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} :\ x \mapsto \ln(x) + 2 - x$$

mindestens zwei Nullstellen besitzt, und mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 6 (Das Newton-Verfahren)
Suchen Sie eine Funktion f, mit deren Hilfe Sie $a = \sqrt{10}$ unter Benutzung des Newton Verfahrens iterativ berechnen können. Führen Sie dann die ersten 4 Schritte der Berechnung von a durch. Ist ein Gesetz erkennbar, nach dem sich die Genauigkeit der Iterationsergebnisse verbessert?