Gruppenübung 5

Aufgabe 1 (**schriftliche Aufgabe** - 4 Punkte)

a. Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

b. Sei $f(x) = \ln(\sin(x))$. Man kann $\ln(\sin(1.5))$ approximieren mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$. Bestimmen Sie $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$ und berechnen Sie den Fehler $|\ln(\sin(1.5)) - T_4(f, 1.5, \frac{\pi}{2})|$ mit einem Rechner. Runden Sie auf zehn Nachkommastellen.

Aufgabe 2 (Taylorentwicklung)

a. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\sqrt[3]{1+2x}$.

  i. Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.
  ii. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_2(f, x, 0)$ und $T_1(f, x, \frac{7}{2})$.
  iii. Bestimmen Sie mit welcher Genauigkeit das Taylorpolynom $T_1(f, x, \frac{7}{2})$ die Funktion f im Intervall $[3, 4]$ approximiert durch das Restglied

$$\sup_{x \in [3,4]} \left| f(x) - T_1(f, x, \tfrac{7}{2}) \right|,$$

  abzuschätzen.

b. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $g(x) = e^{x^2}$ um $x_0 = 0$ und ermitteln Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz und die Taylorreihe von $h(x) = e^x$.

Aufgabe 3 (Konvergenzradius)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 4n^3}{n^3 + n^2} x^n$ b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} x^n$ c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (4 + (-1)^n)^{-3n} x^{5n}$

Aufgabe 4 (Potenzreihen)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^{n+1} - 2^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n(n+1)\sqrt{n+3}}$

Aufgabe 5 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf I, wobei $I =]\,0, \infty[$ für a. und $I = \mathbb{R}$ für b. und c..

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$

Aufgabe 6 (Anwendungen des Satzes von Taylor)
Sei $y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n^m}\right)^n$$

in Abhängigkeit von $m > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x) = e^x$, die Identität $e^{\ln(a)} = a$ für $a > 0$ und die Taylorapproximation $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ für $x \to 0$.