Gruppenübung 6

Aufgabe 1 (**schriftliche Aufgabe** - 4 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i)\quad \int_1^2 4x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad ii)\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$iii)\quad \int_a^b 5x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad iv)\quad \int (1+x^2)^{3/2} dx.$$

Aufgabe 2 (Integrale)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i)\quad \int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x, \qquad ii)\quad \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$iii)\quad \int_0^{\pi} \cos(x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad iv)\quad \int \arctan(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$v)\quad \int \frac{(1+\arctan(x))^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad vi)\quad \int \frac{1}{(2+\varphi)\sqrt{1+\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \text{für } \varphi > -1.$$

$$vii)\quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x, \qquad viii)\quad \int (1-t^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{für } |t| < 1.$$

Aufgabe 3 (Flächeninhalt)
Welche Fläche schließen die Funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(x)$, die Geraden $x = \pi/3$ und $x = \pi$ und die Gerade $y = -1$ ein?

Aufgabe 4 (Beweisaufgabe)
Sei $a > 0$ und seien u und v stetige Funktionen auf $[-a, a]$. Dabei sei u eine gerade Funktion, d.h. es gilt $u(-x) = u(x)$ für alle $x \in [-a, a]$ und v eine ungerade Funktion, d.h. $v(-x) = -v(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-a}^{a} u(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-a}^{a} v(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Verwenden Sie daraufhin diese Aussage, um den Wert des Integrals

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x)(\cos(x))^{x^2} e^{-\frac{x^2}{\pi}}\,\mathrm{d}x$$

zu bestimmen.

Aufgabe 5 (Noch eine Beweisaufgabe)

i) Seien $a < b$ sowie $c < d$. Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar und sei $I : [c,d] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass I differenzierbar ist. Geben Sie desweiteren eine Formel für die Ableitung von I an.

Hinweis: Drücken Sie $I(x)$ durch eine Stammfunktion von f aus.

ii) Bestimmen Sie $I'(x)$ für $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = -\cos^2(x)$ und $h(x) = 1 + \cos^2(x)$.

Aufgabe 6 (Riemannsummen)
Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k},$$

indem Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ als die Riemannsche Summe einer geeigneten Funktion auf einem geeigneten Intervall auffassen.