Gruppenübung 8

Aufgabe 1 (**Schriftliche Aufgabe** - 4 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

$$i) \quad \int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie, für welche Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

konvergiert.

Aufgabe 2 (Uneigentliche Integrale)
Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

$$i) \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x, \qquad iii) \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (Uneigentliche Integrale)

a) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

$$i) \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x,$$

$$iii) \quad \int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{d}x, \qquad iv) \quad \int_0^1 \frac{e^x-1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie, für welche Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\mathrm{d}x,$$

konvergiert.

Aufgabe 4 (Flächeninhalt)
Hat die Fläche, die von den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ und $g(x) = \arctan(x)$ und der Geraden $x = 1$ eingeschlossen wird, rechts der Geraden endlichen Inhalt? Berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

Aufgabe 5 (Beweisaufgabe)
Sei $f : [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f(x) \geq 0$ für all $x \in [0, +\infty[$. Außerdem sei das uneigentliche Integral

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

konvergent. Zeigen Sie dass gilt $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Aufgabe 6 (Reihendarstellung von Funktionen)

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln(x^2 + 2), \qquad\qquad g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

um $x_0 = 0$ durch gliedweise Integration und Differentiation geeigneter Potenzreihen. Geben Sie das größtmögliche offene Intervall $]a, b[\subset \mathbb{R}$ an, auf dem die von Ihnen gefundenen Reihen f und g tatsächlich darstellt.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Welche Funktion stellt diese auf ihrem Konvergenzkreis dar?