Gruppenübung 9

Aufgabe 1 (Kurvenlänge, partielle Ableitungen) **schriftlich - 4 Punkte**

i) Bestimmen Sie die Länge der durch $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ parametrisierten Kurve.

ii) Bestimmen Sie für die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jeweils die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie den Gradienten und die Hesse-Matrix.

a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^5 + y^4 + 6,$ *b)* $g(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z).$

Aufgabe 2 (Richtungsableitung, totale Differenzierbarkeit)

Überprüfen Sie die Funktion $c : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $c(x,y) = 4\ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ auf totale Differenzierbarkeit in $(-1,2)$ und berechnen Sie die Richtungsableitung von c in $(-1,2)$ in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (Richtungsableitung, totale Differenzierbarkeit)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in (x_0,y_0) total differenzierbar und für $u = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelte $\partial_u f(x_0,y_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bzw. $\partial_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den Gradienten von f an der Stelle (x_0,y_0) sowie $\partial_w f(x_0,y_0)$ für $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Dabei ist es nicht notwendig, f und (x_0,y_0) explizit zu kennen. Aufgrund von Satz 20.3 kann die Aufgabe mit Hilfe eines LGS gelöst werden.

Aufgabe 4 (mehrdimensionale Kettenregel, Tangentialebene, steilster Anstieg)

i) Die Funktionen f und g sind gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arctan(\frac{y}{x}) \\ 2\ln\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Funktion $h = f \circ g$ den maximalen Definitionsbereich D sowie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix.

ii) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(2, 0, h(2, 0))$ an den Graphen von h.

iii) Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs von h im Punkt $(2, 0)$.

Aufgabe 5 (mehrdimensionale Kettenregel)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Drücken Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x,y) = f(x^2y, x + 2y)$$

durch jene von f aus.