Gruppenübung 10

Aufgabe 1 (kritische Punkte) **schriftlich - 4 Punkte**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x^2\, y^2 + y^3 - y$.

i) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

ii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

iii) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 2 (mehrdimensionaler Satz von Taylor)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2} \cos(x_1) \sin(x_2).$$

i) Bestimmen Sie die mehrdimensionalen Taylorpolynome

$$T_i(f, x, x_0) = \sum_{|\alpha| \le i} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

für $i = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}^2$ und $x_0 = (0, 0)$ und geben Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restglieds

$$R_1(f, x, x_0) = f(x) - T_1(f, x, x_0)$$

für $|x| \le 1$ an.

ii) Bestimmen Sie die mehrdimensionale Taylorreihe von g mit

$$g(x, y, z) = \frac{yz^3}{1 - x^2 z}$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$ mit Hilfe einer bekannten eindimensionalen Reihe.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass auch mehrdimensionale Potenzreihendarstellungen von Funktionen um einen festen Entwicklungspunkt eindeutig sind.

Aufgabe 3 (Extrema)
Bestimmen Sie für die folgende Funktion die lokalen Extrema

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z.$$

Aufgabe 4 (Hurwitz-Kriterium für 2×2 Matrizen)

a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f und $\det(f''(x_0)) > 0$, dann gilt

   i) $\partial_{x_1}^2 f(x_0) > 0$ impliziert ein lokales Minimum.

   ii) $\partial_{x_1}^2 f(x_0) < 0$ impliziert ein lokales Maximum.

b) Wenden Sie das Kriterium auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto 5x^2 + 5y^2 - 7xy + 1$$

an.

Aufgabe 5 (Wahr oder falsch?)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Sind die folgende Aussagen wahr oder falsch?

i) Ist x_0 ein Sattelpunkt, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ ist weder negativ noch positiv definit.

ii) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ weder negativ noch positiv definit, so ist x_0 ein Sattelpunkt.

Begründen Sie Ihre Antwort (bei einer falschen Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels).