Gruppenübung 11

Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integralrechnung) Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} = [0,1] \times [0,1].$

(b) $\int_D (x^3 + y^2 + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D = [0,1] \times [0,2] \times [0,3].$

(c) $\int_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D ist das von den Geraden $y = 1, x = 2, y = x$ eingeschlossene Gebiet.

(d) $\int_D e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D ist das von den Geraden $y = 0, x = 1, y = x$ eingeschlossene Gebiet.

Aufgabe 2 (Normalbereich, Flächeninhalt und Rotationskörper)
Gegeben ist das endliche Flächenstück D im ersten Quadranten, das von der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$ berandet wird.

(a) Ist das Flächenstück ein Normalbereich in x–Richtung? in y–Richtung?

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation von D um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 3 (Integrale mittels Transformation)

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Geraden

$$y = ax, y = bx, x + y = c, x + y = d, \quad (0 < a < b, 0 < c < d)$$

eingeschlossenen Gebiets D.

(b) Berechnen Sie $\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wobei D das vom

$$D_1 = \{(x,y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\} \text{ und den Geraden } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, x = 0$$

eingeschlossene Gebiet ist.

(c) Aus einer zylinderförmigen, homogenen Torte von Höhe H und Radius R schneiden wir ein sektorförmiges Tortenstück vom Winkel α symmetrisch zur x-Achse heraus. Parametrisieren Sie das Tortenstück in Zylinderkoordinaten $g(r, \beta, h) = (r\cos\beta, r\sin\beta, h)$ und berechnen Sie das Volumen.