Gruppenübung

Aufgabe 1 (schriftliche Aufgabe - 4 Punkte)

i) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+4n^2+5n},\qquad b)\quad a_n = \frac{2n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)^2},\qquad c)\quad a_n = \frac{7n-\sqrt{n^3}}{n+\sqrt{n}},$$

$$d)\quad a_n = (-1)^n + \frac{n}{2+n^3},\qquad e)\quad a_n = \frac{2^n+3^n}{3^n+n^5},\qquad f)\quad a_n = n(\sqrt{n^4+8n}-\sqrt{n^4+5}),$$

$$g)\quad a_n = 1+\left(\frac{1}{1000}\right)^n,\qquad h)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^n.$$

ii) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall n\in\mathbb{N}: \qquad b_n = \frac{n}{n+1}\left((-1)^n+1\right).$$

Aufgabe 2 (Folgen und Konvergenz)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)},\qquad b)\quad a_n = \frac{3n^2-4n+(-1)^n}{(2n-\sqrt{n})^3-4} + i\left(\frac{2n^4-n^3}{1+n^4}+\frac{n-2}{n+4}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$c)\quad a_n = \frac{n^2}{2^n},\qquad d)\quad a_n = (-1)^n\frac{1}{n} + in\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$e)\quad a_n = \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n,\qquad f)\quad a_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3},$$

$$g)\quad a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2},\qquad h)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$i)\quad a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,\qquad j)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Aufgabe 3 (Häufungspunkte, limes superior, limes inferior, rekursive Folgen)

i) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen und, falls existent, den Limes superior und Limes inferior:

$$a) \quad a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}, \qquad\qquad b) \quad a_n = i^n.$$

ii) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{array}{llll} a) & x_1 = 7, & x_{n+1} = \sqrt{7+2x_n} & \text{für } n \geq 1, \\ b) & y_1 = 1, & y_{n+1} = \dfrac{n^2+4n+1}{n^3+8} y_n & \text{für } n \geq 1. \end{array}$$

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4 (Beweisaufgabe)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folgen. Beweisen Sie: Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ die Ungleichung $|c_n| \leq |a_n| \cdot |b_n|$ gilt und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.